則古昔齋算十三種

火器眞訣

則古昔齋算學

海甯李善蘭學

凡鎗礮鉛子皆行拋物線推算甚繁見余所譯重學中欲求簡便之術久未能得冬夜少睡復于枕上反覆思維忽悟可以平圓通之因演爲若干款依款量算命中不難矣戊午臘盡日自識

第一款　凡鎗礮內鉛子路須極光滑軸線須極準如圖甲乙爲軸線丙丁爲鉛子路口戊己爲鉛子路底口底大小如一其周自口至底俱如平行線則軸線準矣

第二欵　凡鉛子須極圓整光滑有一定輕重火藥製造須極精有一定斤兩裝法須千回如一欲試裝手優劣用一定方向一定高度置礮位連演數次若鉛子俱落原處則其人可用否則不可用

右二欵爲法之本非如此則爲無法之火器推算不能密合也

第三欵　凡平地施放鎗礮軸線對高弧四十五度鉛子所落之地最遠

如圖甲乙為地平線丁甲為垂線補成甲乙丙丁正方形作對角線甲丙則得乙甲丙角四十五度火器軸線與甲丙線平行鉛子所落之地最遠也

第四欵　凡斜面施放鎗礮軸線為垂線交斜面角之分角線鉛子所落之地最遠

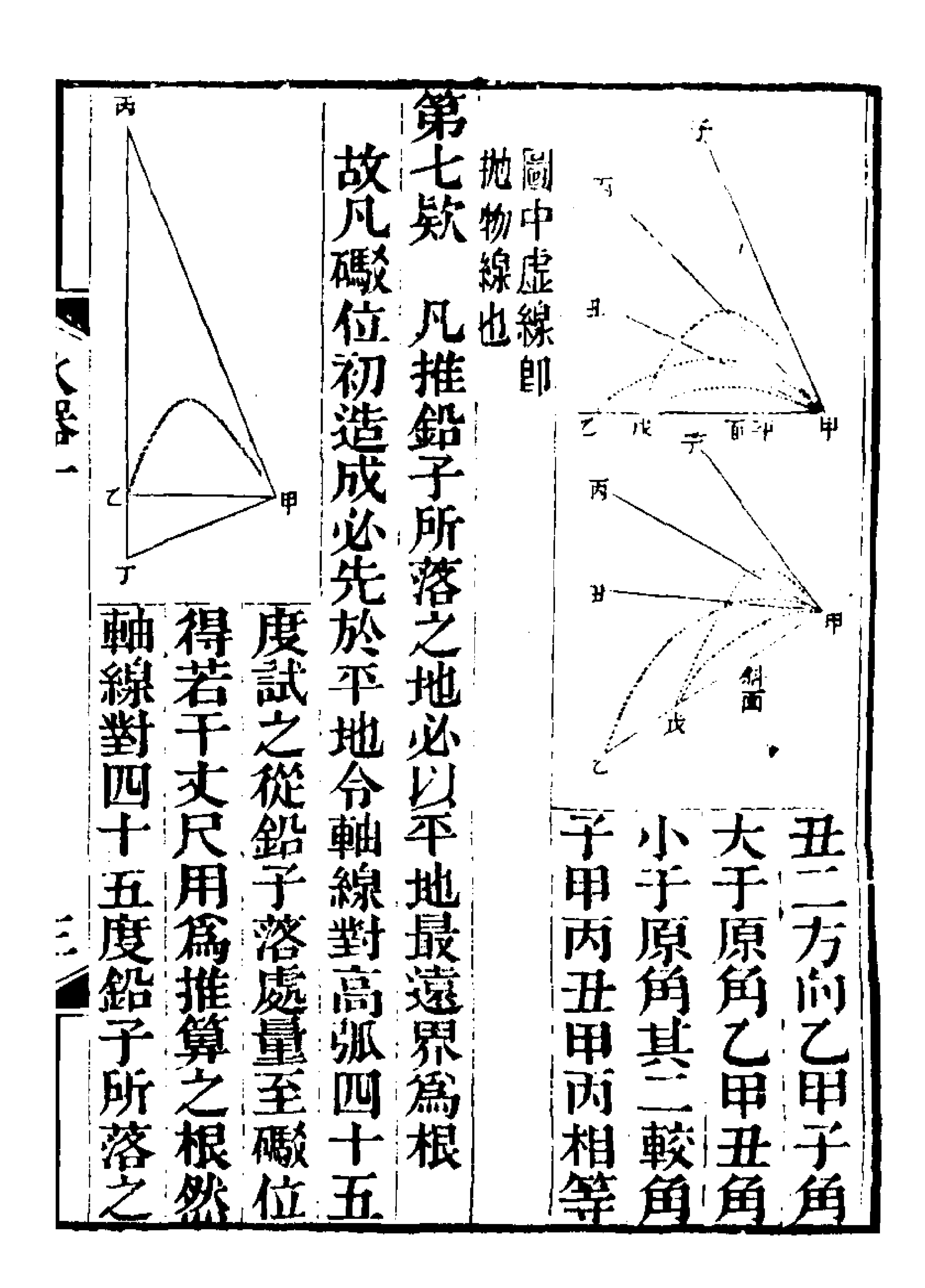
如圖甲乙為斜面丁甲為垂線乙甲丁為垂線與斜面之交角補成甲乙丙丁四等邊形作對角線甲丙即分

角線也軸線與之平行鉛子所落之地最遠斜面或向上或向下理同

第五欵　凡地在最遠界之外則鉛子不能到賊未入最遠界我軍即施鎗礮徒費軍實不能傷賊

第六欵　凡地在最遠界之內則軸線有二方向其交平面或斜面之角一大于最遠界之軸線交角一小于最遠界之軸線交角其較角相等

如圖甲乙爲最遠界乙甲丙爲最遠界之軸線交平面或斜面角設有戊點在最遠界內則其軸線有甲子甲



丑二方向乙甲子角大于原角乙甲丑角小于原角其二較角子甲丙丑甲丙相等

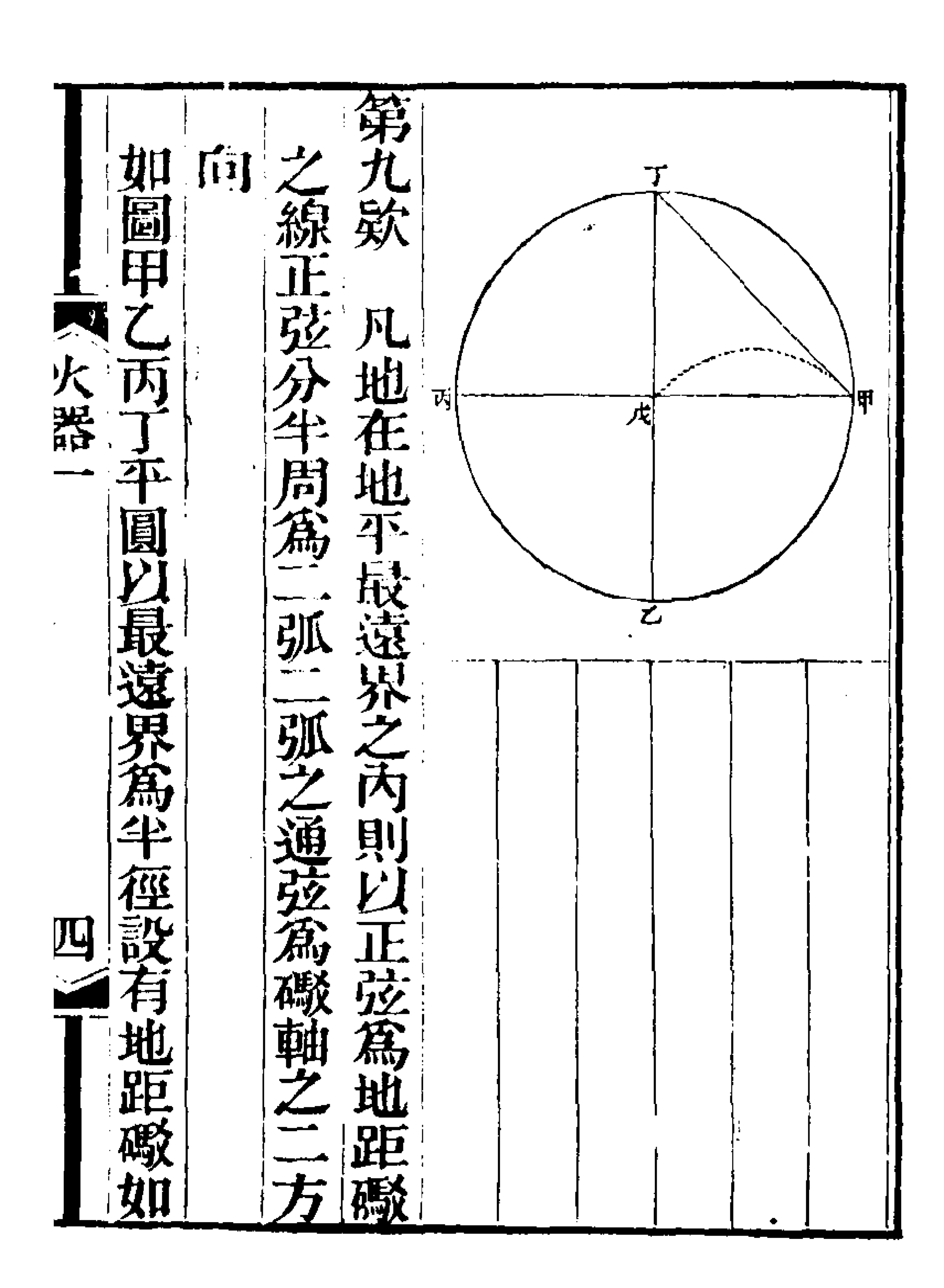
圖中虛線即拋物線也

第七欵　凡推鉛子所落之地必以平地最遠界爲根故凡礮位初造成必先於平地令軸線對高弧四十五度試之從鉛子落處量至礮位得若干丈尺用爲推算之根然軸線對四十五度鉛子所落之

地甚遠丈量不便一法令軸線所指高弧大于四十五度小于四十五度則鉛子落地尚能橫走不便于用　如乙甲丙角試得鉛子距礮爲乙甲乃作乙甲丙句股形以乙甲自乘以乙丙除之得乙丁以加乙丙折半卽最遠界也

第八欵　以最遠界爲半徑作平圜過圜心作地平線置礮圜周則九十度通弦爲礮軸方向圜心爲鉛子所落之處

如圖甲戊爲最遠界用爲半徑作甲乙丙丁平圜作甲丙地平徑作丁乙垂徑作甲丁九十度通弦置礮于甲其軸線與通弦合則鉛子必落于圜心戊點



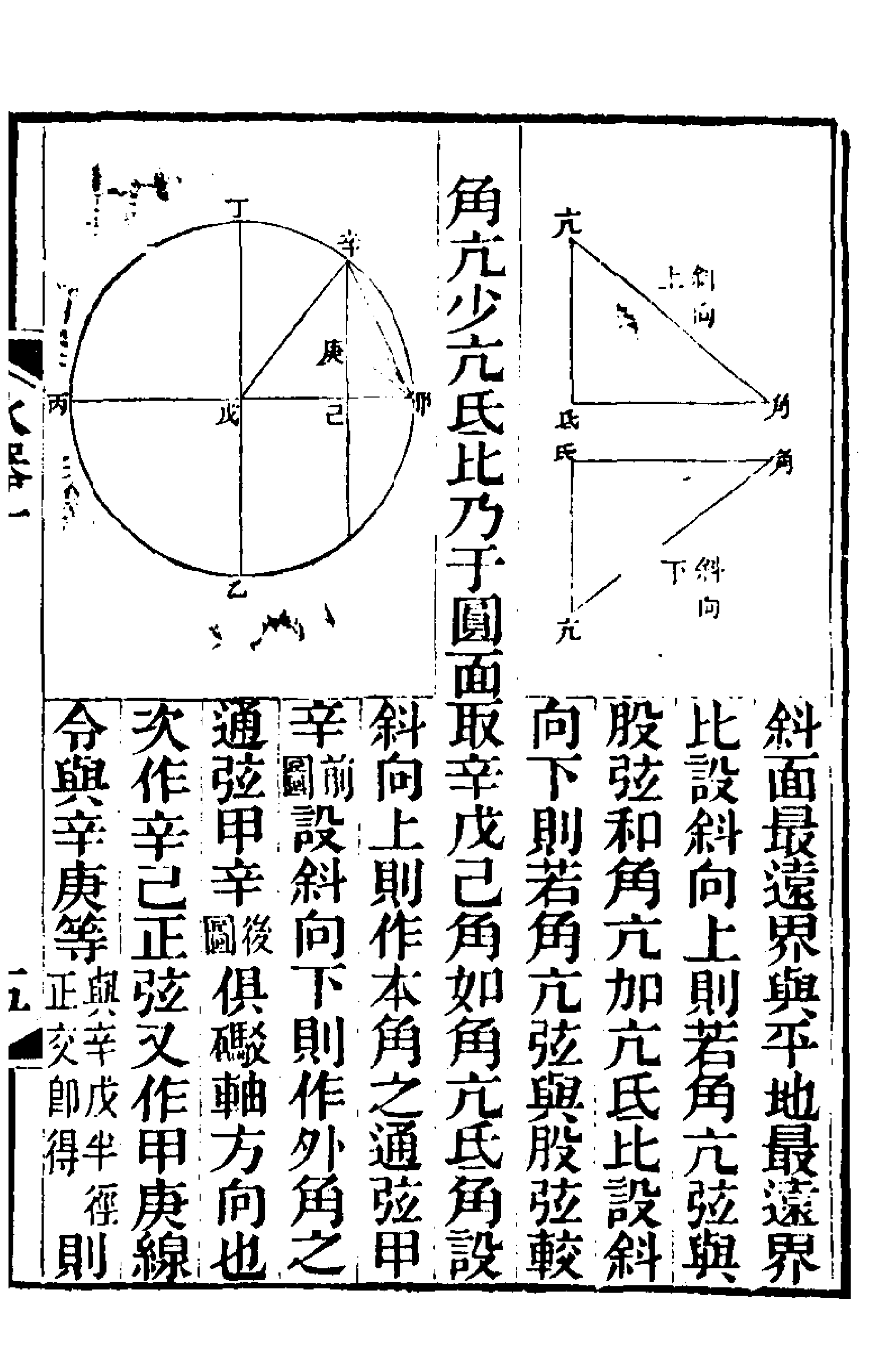
第九欵　凡地在地平最遠界之內則以正弦爲地距礟之線正弦分半周爲二弧二弧之通弦爲礟軸之二方向

如圖甲乙丙丁平圓以最遠界爲半徑設有地距礟如

戊己則自己點與垂徑平行作辛癸線次作庚辛壬癸二正弦俱與戊己等次作辛丁癸丁二通弦卽礮軸之二方向也

第十欵　斜面與平垂二線成句股形則平地最遠界與斜面最遠界比若股弦和或較與弦比而股弦交角之通弦或減半周餘度之通弦卽礮軸方向也

如圖角亢斜面與地平線角氐垂線亢氐成句股形其



斜面最遠界與平地最遠界比設斜向上則若角亢弦與股弦和角亢加亢氐比設斜向下則若角亢弦與股弦較角亢少亢氐比乃于圓面取辛戊己角如角亢氐角設斜向上則作本角之通弦甲辛（前圖）設斜向下則作外角之通弦甲辛（後圖）俱礮軸方向也次作辛己正弦又作甲庚線令與辛庚等（與辛戊半徑正交即得）則

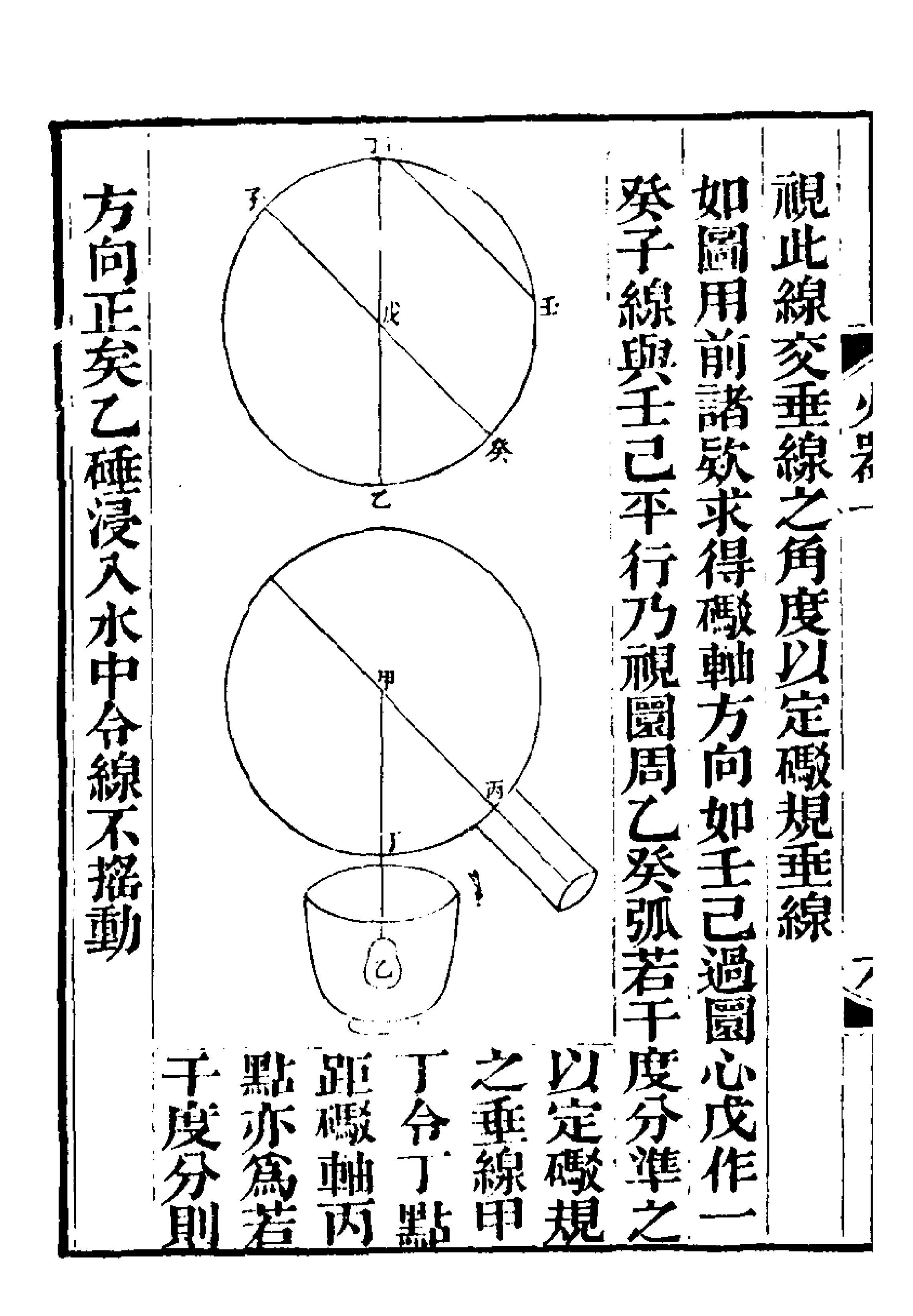
辛己與甲庚比若平地最遠界與斜面最遠界比前圖之辛己股弦和也後圖之辛己股弦較也　案若下斜之面交地平角大于三十度則庚點在圜周之外

第十一欵　凡地在斜面最遠界內則自最遠界端量取其數作點于此點與前欵正弦平行作通弦自通弦二端至正弦端作二線卽礮軸之二方向也

如圖甲庚爲斜面最遠界設有地在最遠界內如庚辛

則自辛點與己戊正弦平行作壬癸通弦次作壬己癸己二線即礮軸方向也試與斜面平行作壬子癸丑二線若礮在壬癸二點鉛子必落于子丑二點

第十二欵　既得礮軸方向乃過圜心作一線與之平行



視此線交垂線之角度以定礮規垂線

如圖用前諸欵求得礮軸方向如壬已過圜心戊作一癸子線與壬已平行乃視圜周乙癸弧若干度分準之以定礮規之垂線甲丁合丁點距礮軸丙點亦爲若干度分則方向正矣乙錘浸入水中合線不搖動

附火藥增減鉛子遠近表

此表自右而左如火藥一錢鉛子當及五丈三尺火藥一錢一分鉛子當及七丈七尺七寸奇

火藥鉛子遠近率

一○	五三○○○
一一	七七七一二
一二	一○二七七六
一三	一二八一八四
一四	一五三九二八
一五	一八○○○○
一六	二○六三九二
一七	二三三○九六
一八	二六○一○四
一九	二八七四○八
二○	三一五○○○
二一	三四二八七二
二二	三七一○一六
二三	三九九四二四
二四	四二八○八八
二五	四五七○○○
二六	四八六一五二
二七	五一五五三六
二八	五四五一四四
二九	五七四九六八
三○	六○五○○○
三一	六三五二三二
三二	六六五六五六
三三	六九六二六四
三四	七二七○四八
三五	七五八○○○

上元孫文川校

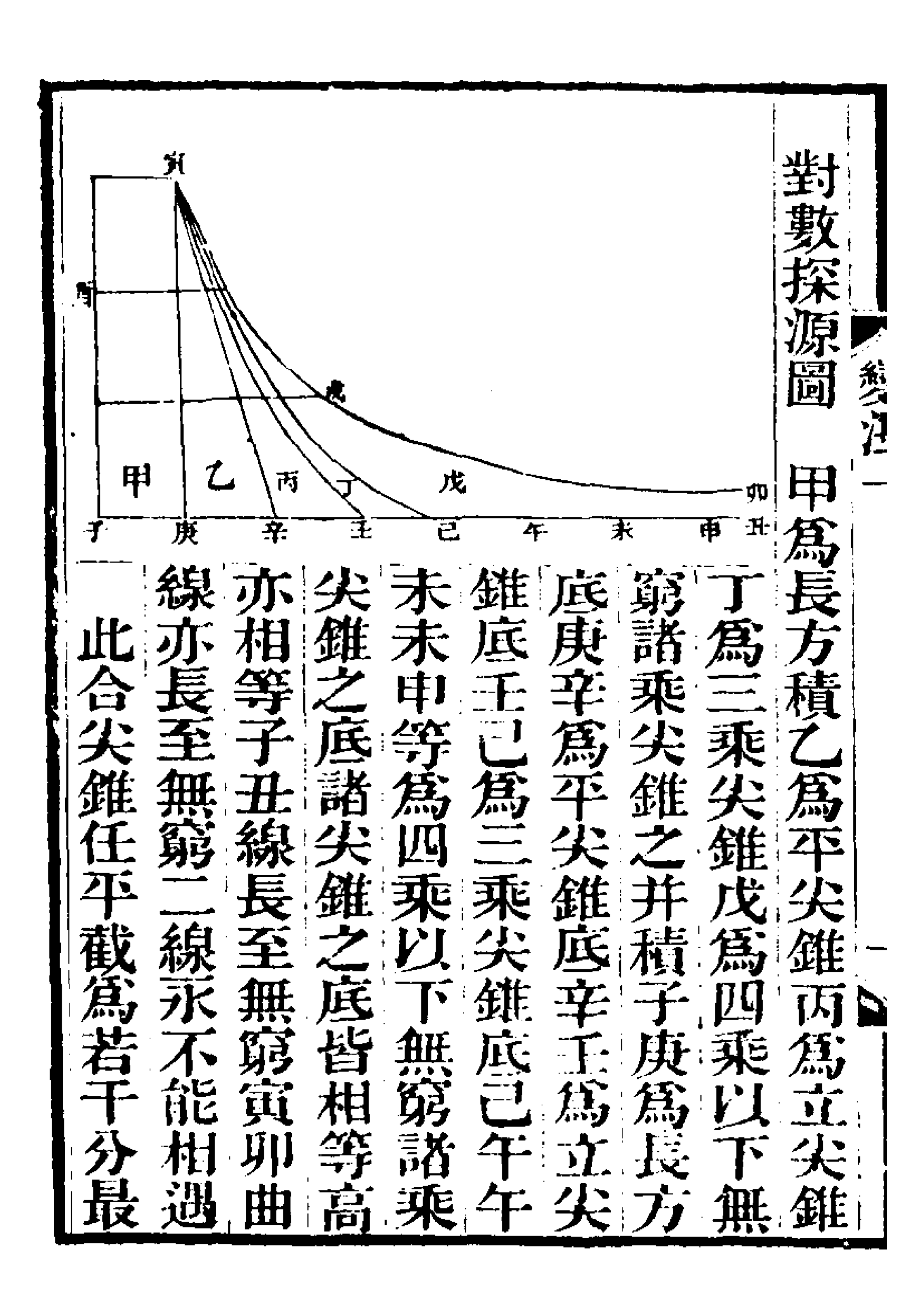
則古昔齋算學十一

對數尖錐變法釋

海甯李善蘭學

善蘭昔年作對數探源二卷明對數之積爲諸乘方合尖錐金山錢氏刊入指海中後與西士遊譯泰西天算諸種其言雙曲綫與漸近綫中間之積卽對數積核其數與善蘭所定諸乘方尖錐合而其求對數諸較則法又不同葢善蘭所用正法也西人所用變法也不明其故幾疑二法所用之根不同故特釋之以解後世學者之惑

合尖錐圖說



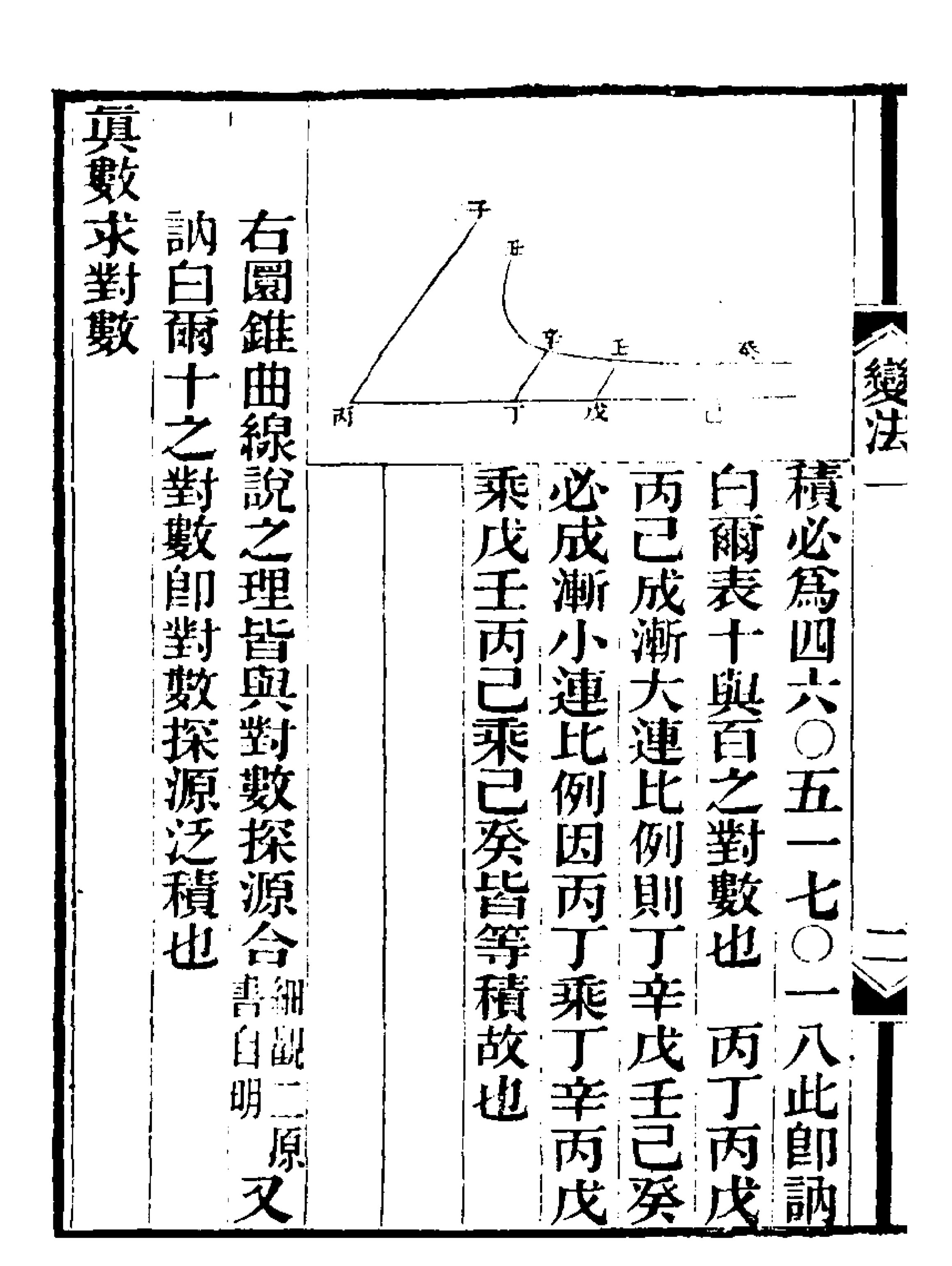
對數探源圖　甲爲長方積乙爲平尖錐丙爲立尖錐丁爲三乘尖錐戊爲四乘以下無窮諸乘尖錐之并積子庚爲長方底庚辛爲平尖錐底辛壬爲立尖錐底壬己爲三乘尖錐底己午午未未申等爲四乘以下無窮諸乘尖錐之底諸尖錐之底皆相等高亦相等子丑線長至無窮寅卯曲線亦長至無窮二線永不能相遇

一　此合尖錐任平截爲若干分最

下一層爲一之對數次上一層爲一與二兩對數之較再上一層爲二三兩對數之較餘可類推不論層之多少自二層至百千萬層俱合　最下一層爲無窮數故一之對數不可得以○代之　圖平截爲三酉戌爲一二兩對數之較寅酉爲二三兩對數之較也

圜錐曲線說圖　癸丑爲雙曲線丙己丙子俱爲漸近線作丙丁丙戊丙己諸連比例數設丙丁爲一則辛丁戊壬辛丁己癸二段積必與丙戊丙己之對數相符若丙爲直角丙丁丁辛俱爲一丙戊爲十丙己爲百則丁戊壬辛面積必爲二三○二五八五○九丁己癸辛面

積必爲四六〇五一七〇一八此卽訥白爾表十與百之對數也　丙丁丙戊丙己成漸大連比例則丁辛戊壬己癸必成漸小連比例因丙丁乘丁辛丙戊乘戊壬丙己乘己癸皆等積故也



右圜錐曲線說之理皆與對數探源合細觀二原書自明　又訥白爾十之對數卽對數探源泛積也

眞數求對數

對數探源法　先求諸尖錐置長方積取二分之一爲平尖錐積取三分之一爲立尖錐積取四分之一爲三乘尖錐積取五分之一爲四乘錐積餘可類推

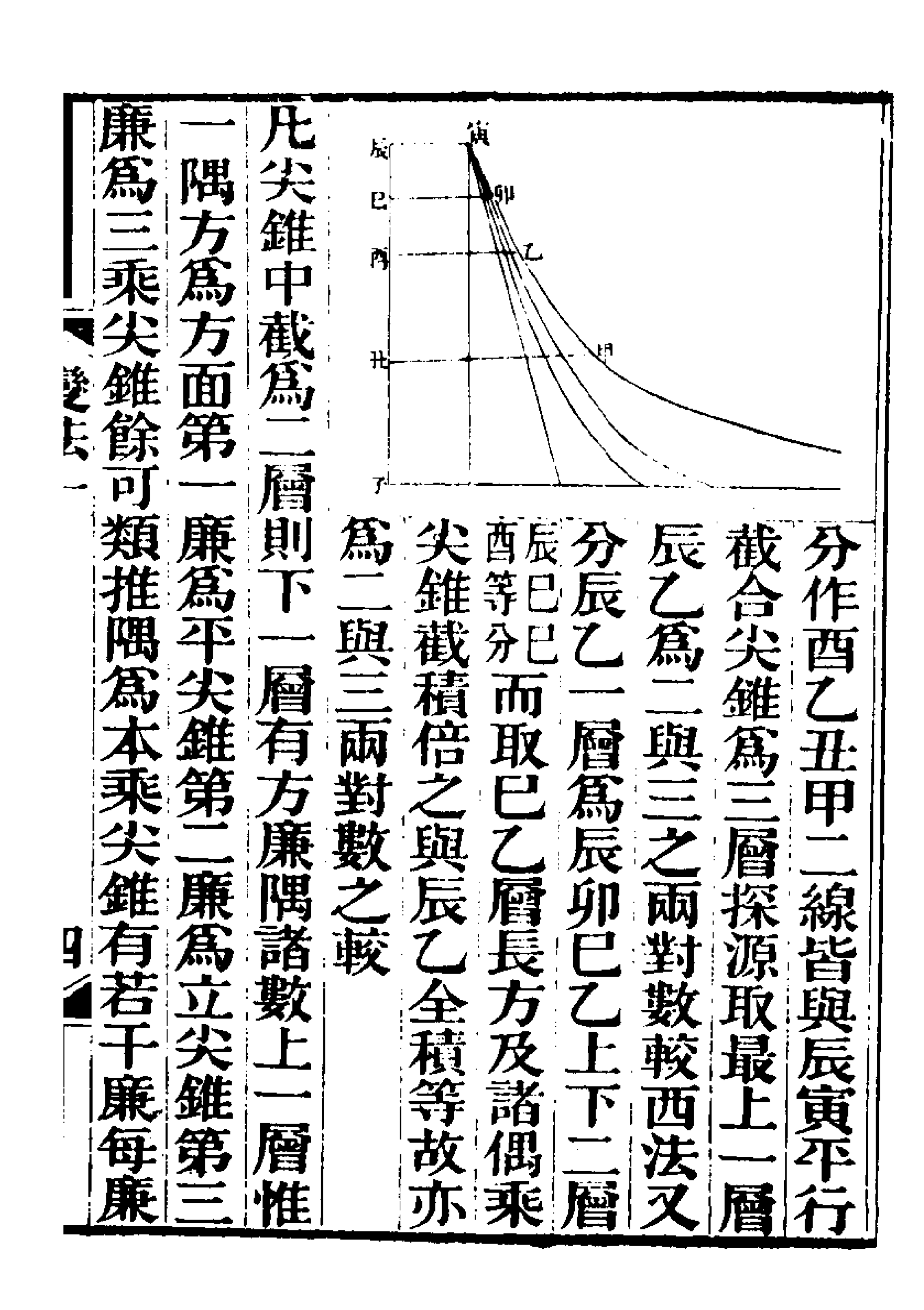
眞數求對數以眞數除長方一次除平尖錐二次除立尖錐三次除三乘尖錐四次除四乘尖錐五次如此遞除至得數不滿表之末位十分之一而止乃併其除得數爲本數之對數較加入前一數之對數爲本數之對數如三爲本數則以較加入二之對數爲三之對數也

代數學及代微積拾級法　以眞數倍之減一爲法除長方一次除立尖錐三次除四乘尖錐五次除六乘尖

錐七次如此遞除至得數不滿表之末位而止乃併其除得數倍之爲本數之對數較加入前一數之對數爲本數之對數

右探源以本數爲法西術以倍本數減一爲法探源各乘尖錐全用西術間一尖錐用之而得數皆合對數探源法乃依眞數截合尖錐爲若干層取其最上一層也西法則又截最上一層爲上下二層而取下一層方面及諸偶乘尖錐截積倍之也其兩數恰合者則諸尖錐廉隅正負相消之理也

如眞數爲三則分長方邊辰子爲辰酉酉丑丑子三等

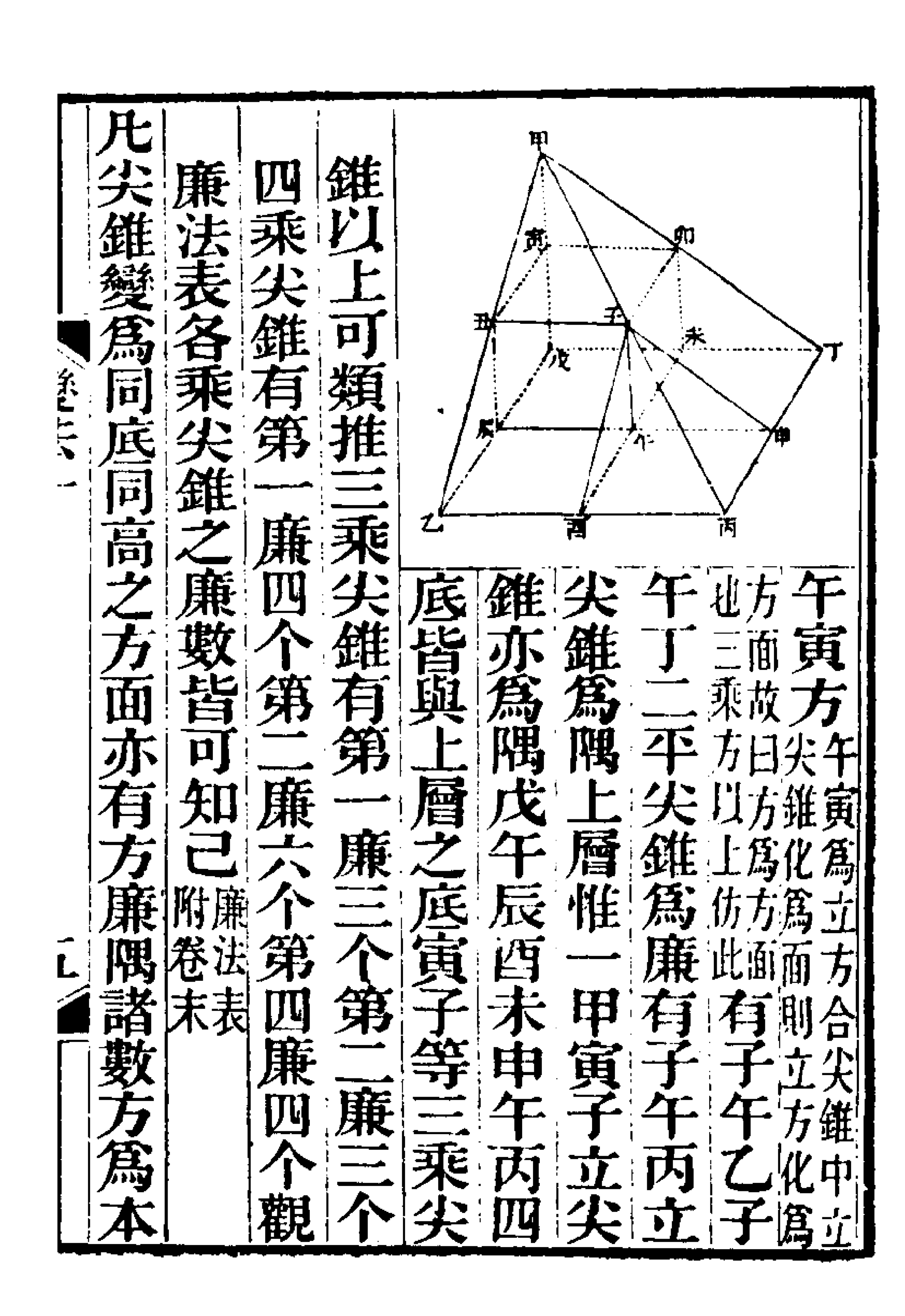


分作酉乙丑甲二線皆與辰寅平行截合尖錐爲三層探源取最上一層辰乙爲二與三之兩對數較西法又分辰乙一層爲辰卯巳乙上下二層辰巳巳酉等分而取巳乙層長方及諸偶乘尖錐截積倍之與辰乙全積等故亦爲二與三兩對數之較

凡尖錐中截爲二層則下一層有方廉隅諸數上一層惟一隅方爲方面第一廉爲平尖錐第二廉爲立尖錐第三廉爲三乘尖錐餘可類推隅爲本乘尖錐有若干廉每廉

若干視本尖錐底之乘方平尖錐之底爲線立尖錐之底爲平方三乘尖錐之底爲立方本尖錐之乘數減一即底之乘方數也詳方圜闡幽查廉法表即得方廉隅之底皆相等即上一層之底也

如甲乙丙爲平尖錐中分甲乙于丁作丁戊線與乙丙平行截爲上下二層下層有乙戊方面爲方戊己丙平尖錐爲隅上層惟一甲丁戊平尖錐爲隅乙己己丙皆與丁戊等　又如甲乙丙丁戊爲立尖錐中分甲乙甲丙甲丁甲戊四線于丑子卯寅四點作子寅面截立尖錐爲二層下層有



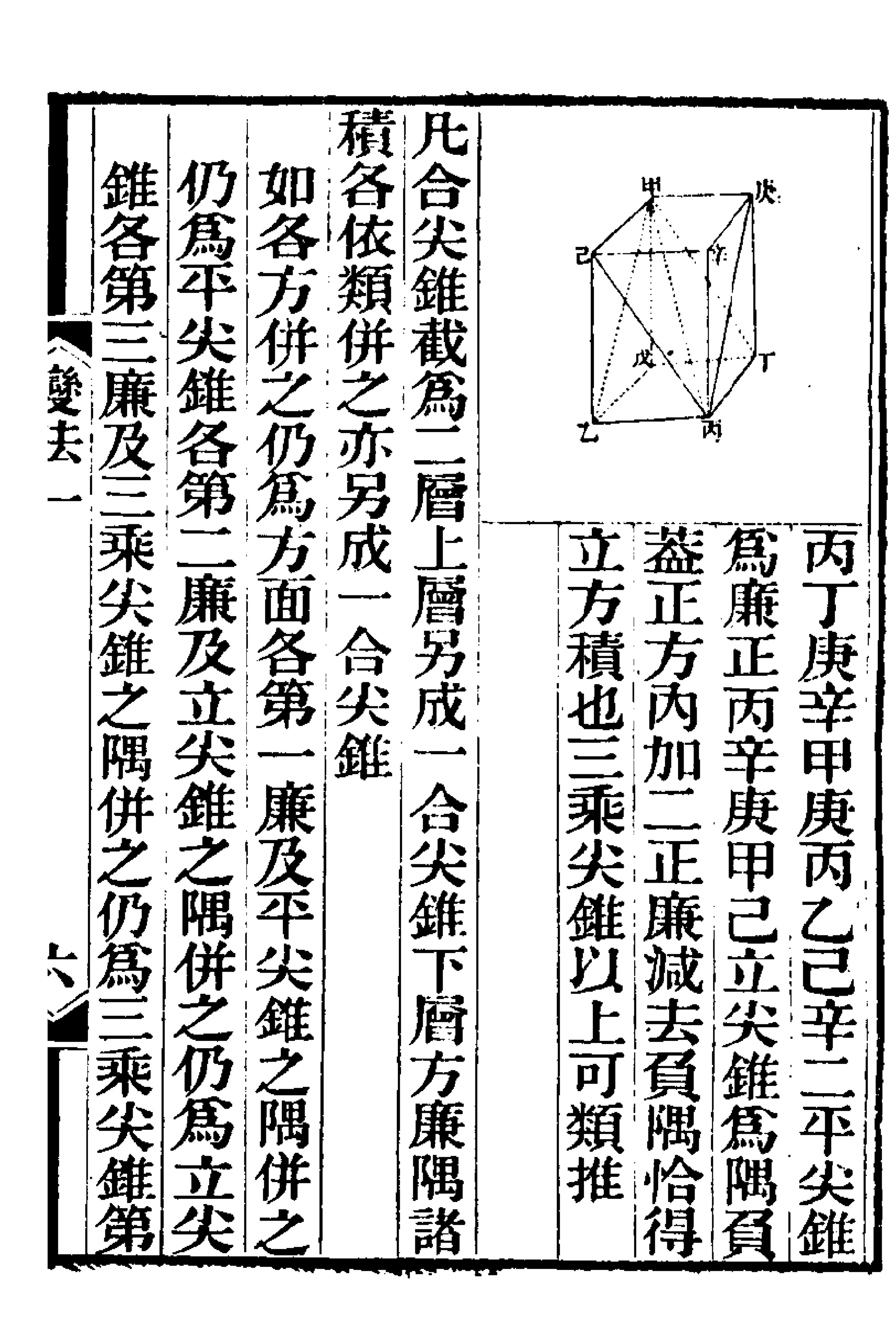
午寅方午寅爲立方合尖錐中立尖錐化爲面則立方化爲方面故曰方爲方面也三乘方以上仿此有子午乙子午丁二平尖錐爲廉有子午丙立尖錐爲隅上層惟一甲寅子立尖錐亦爲隅戊午辰酉未申午丙四底皆與上層之底寅子等三乘尖錐以上可類推三乘尖錐有第一廉三个第二廉三个四乘尖錐有第一廉四个第二廉六个第四廉四个觀廉法表各乘尖錐之廉數皆可知已廉法表附卷末

凡尖錐變爲同底同高之方面亦有方廉隅諸數方爲本

尖錐正第一廉爲平尖錐正第二廉爲立尖錐負第三廉爲三乘尖錐正第四廉爲四乘尖錐負餘可類推隅爲本乘尖錐乘數奇者正偶者負有若干廉每廉若干視本尖錐底爲幾乘方查廉法表卽得方廉隅之底與高皆相等

如甲乙丙爲平尖錐變爲甲丁長方則有方甲乙丙本尖錐有隅甲丁丙平尖錐俱爲正

又如甲乙丙丁戊立尖錐變爲戊辛方戊辛爲立方合尖錐皆化爲平面則立方亦化方面矣故曰同底同高之方面也三乘方以上倣此則有甲乙丙丁戊本尖錐爲方正甲己



丙丁庚辛甲庚丙乙己辛二平尖錐爲廉正丙辛庚甲己立尖錐爲隅負蓋正方内加二正廉減去負隅恰得立方積也三乘尖錐以上可類推

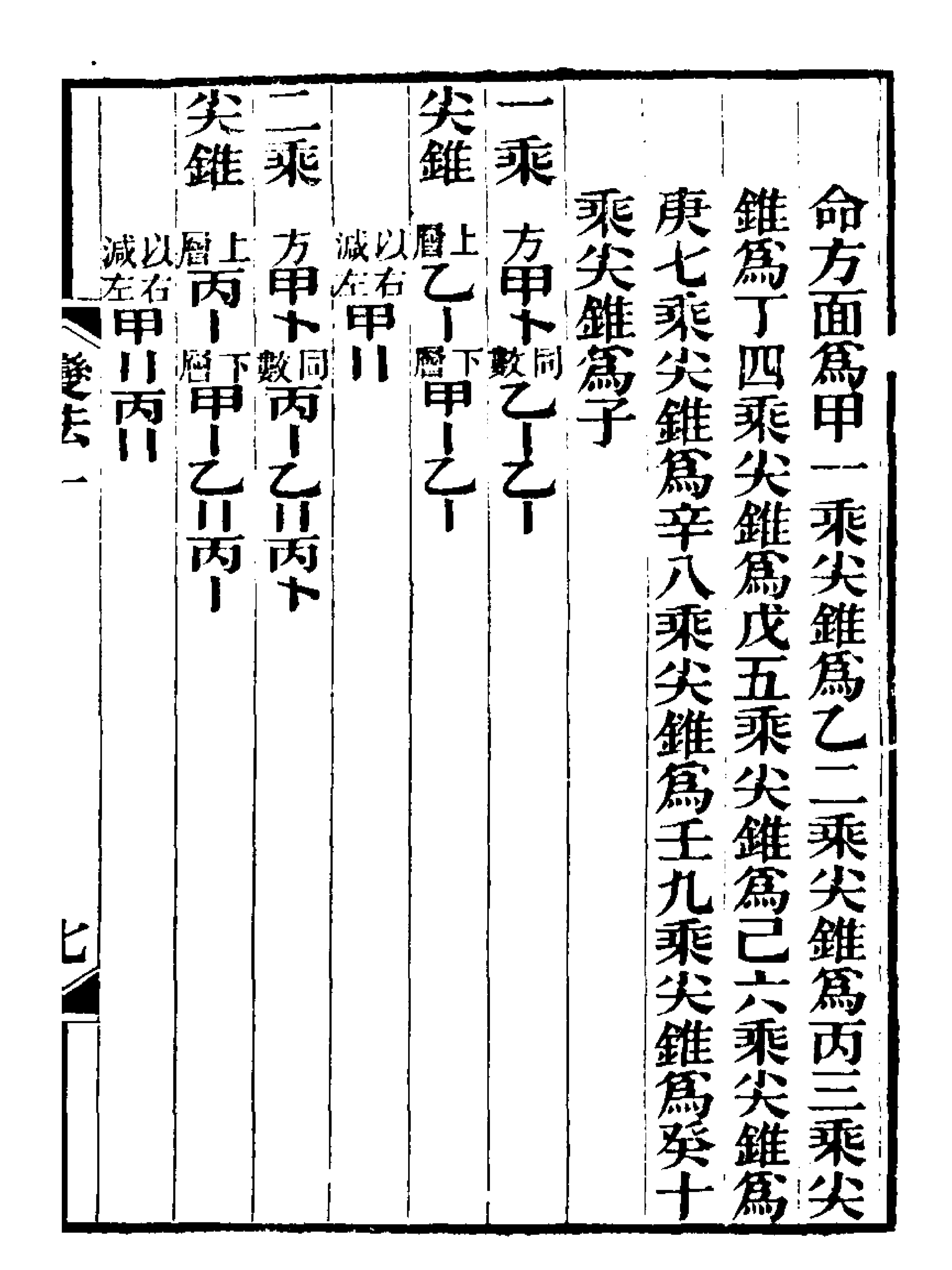
凡合尖錐截爲二層上層另成一合尖錐下層方廉隅諸積各依類併之亦另成一合尖錐

如各方併之仍爲方面各第一廉及平尖錐之隅併之仍爲平尖錐各第二廉及立尖錐之隅併之仍爲立尖錐各第三廉及三乘尖錐之隅併之仍爲三乘尖錐第

四廉以上皆如是併之爲四乘以上諸尖錐故下層另成一合尖錐也

上所列三條之理既明乃可論探源與西術相合之理試置各乘尖錐下層之方依第二條求其同數乃並置上下二層諸方廉隅以方加之以同數減之則上層消盡下層方與諸偶乘尖錐皆得倍積諸奇乘尖錐亦消盡而全積仍不變乃依第三條併之又加入原有之方面（未分爲上下層時所有長方面也）得下層方面及諸偶乘尖錐之倍故兩術不同而得數相合蓋同用一合尖錐但一爲正法一爲變法耳

列一乘至十乘尖錐相消圖以明之



命方面爲甲一乘尖錐爲乙二乘尖錐爲丙三乘尖錐爲丁四乘尖錐爲戊五乘尖錐爲己六乘尖錐爲庚七乘尖錐爲辛八乘尖錐爲壬九乘尖錐爲癸十乘尖錐爲子

一乘尖錐　方甲丄同數乙丨乙丨

上層乙丨下層甲丨乙丨

以右減左甲〢

二乘尖錐　方甲丄同數丙丨乙〢丙丄

上層丙丨下層甲丨乙〢丙丨

以右減左甲〢丙〢

三乘 方甲十同數丁丨乙川丙卌丁丨

尖錐 上層丁丨 下層甲丨乙川丙川丁丨

以右減左甲〢丙丅

四乘 方甲十同數戊丨乙𝍣丙下丁𝍣戊十

尖錐 上層戊丨 下層甲丨乙𝍣丙丅丁𝍣戊丨

以右減左甲〢丙二戊〢

五乘 方甲十同數己丨乙𝍤丙丨〇丁丨〇戊卌己丨

尖錐 上層己丨 下層甲丨乙𝍤丙丨〇丁丨〇戊𝍤己丨

以右減左甲〢丙〢〇戊丨〇

六乘 方甲十同數庚丨乙丅丙𝍧丁〢〇戊𝍧己丅庚十

尖錐 上層庚〡 下層甲〡乙〦丙〡〥丁〢〇戊〡〥己〦庚〡
以右減左甲〢丙〣〇戊〣〇庚〢

七乘 方甲卜同數辛〡乙〧丙〢〡丁〣〥戊〣〥己〢〡庚〧辛〡

尖錐 上層辛〡 下層甲〡乙〧丙〢〡丁〣〥戊〣〥己〢〡庚〧辛〡
以右減左甲〢丙〤〢戊〧〇庚〡〤

八乘 方甲卜同數壬〡乙〨丙〢〨丁〥〦戊〧〇己〥〦庚〢〨辛〨壬卜

尖錐 上層壬〡 下層甲〡乙〨丙〢〨丁〥〦戊〧〇己〥〦庚〢〨辛〨壬〡
以右減左甲〢丙〥〦戊〡〤〇庚〥〦壬〢

九乘 方甲卜同數癸〡乙〩丙〣〦丁〨〤戊〡〢〦己〡〢〦庚〨〤辛〣〦壬〩癸〡

尖錐 上層癸〡 下層甲〡乙〩丙〣〦丁〨〤戊〡〢〦己〡〢〦庚〨〤辛〣〦壬〩癸〡

十乘方　甲卜同數　子丨乙丨〇丙〣𝍣丁〦〇戊𝍤〇己〣𝍢庚〦〇辛〨〇壬〣𝍣癸丨〇子卜

以右減左　甲〢丙𝍣〢戊〣𝍢庚𝍢壬〦

尖錐　上層子丨　下層甲丨乙丨〇丙𝍢〣丁〨〇戊〢〇己〣𝍢庚〦〇辛〦〇壬𝍢〣癸丨〇子丨

以右減左　甲〢丙𝍢〇戊〣〡〇庚〣〡〇壬〣〇子〢

右十尖錐減餘皆得下層方及諸偶乘尖錐之倍十一乘以上一切尖錐皆如是設上下層總積為真數二三之對數較則下層總積即四五之對數較并諸減餘加入原有之方面（二三對數較之方面也）必為四五對數較中之方及諸偶乘尖錐之倍與二三之對數較等積若上下層總積為六七之對數較則下層總積即十二十三之對

數較并諸減餘加入原有之方面六七對數較之方面也必爲十二十三對數較中之方及諸偶乘尖錐之倍與六七之對數較等積餘可類推

附各乘方廉法表

南豐吳嘉善校

一 太
一 一 元
一 二 一 平方
一 三 三 一 立方
一 四 六 四 一 三乘方
一 五 一〇 一〇 五 一 四乘方
一 六 一五 二〇 一五 六 一 五乘方
一 七 二一 三五 三五 二一 七 一 六乘方
一 八 二八 五六 七〇 五六 二八 八 一 七乘方
一 九 三六 八四 一二六 一二六 八四 三六 九 一 八乘方
一 一〇 四五 一二〇 二一〇 二五二 二一〇 一二〇 四五 一〇 一 九乘方
一 一一 五五 一六五 三三〇 四六二 四六二 三三〇 一六五 五五 一一 一 十乘方
一 一二 六六 二二〇 四九五 七九二 九二四 七九二 四九五 二二〇 六六 一二 一 十一乘方

隅 十一廉 十廉 九廉 八廉 七廉 六廉 五廉 四廉 三廉 二廉 一廉 方

級數回求

則古昔齋算學十二

海甯李善蘭學

凡算術用級數推者有以此推彼之級數即可求以彼推此之級數設數題如法演之爲一切級數互求之準繩

今有弧背求正弦之級數問正弦求弧背之級數若何

弧背求正弦之級數

$$弧背 \top \frac{一\times二\times三\,徑^{二}}{弧背^{三}} \perp \frac{一\times二\times三\times四\times五\,徑^{四}}{弧背^{五}} \top \frac{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七\,徑^{六}}{弧背^{七}} \perp \cdots$$

命弧背爲天正弦爲地半徑爲甲列等數如左爲原式

$$地 = 天 - \frac{天^{三}}{二\times三甲^{二}} + \frac{天^{五}}{二\times三\times四\times五甲^{四}} - \frac{天^{七}}{二\times三\times四\times五\times六\times七甲^{六}} + \cdots$$

原式

以原式左右各自乘左邊地自乘得地二右邊先以第一級徧乘各級次以第二級徧乘第三級以下依次徧乘列如下

$$天^{二} - \frac{天^{四}}{二\times三甲^{二}} + \frac{天^{六}}{二\times三\times四\times五甲^{四}} - \frac{天^{八}}{二\times三\times四\times五\times六\times七甲^{六}} + \cdots$$

$$- \frac{天^{四}}{二\times三甲^{二}} + \frac{天^{六}}{二\times三\times二\times三甲^{四}} - \frac{天^{八}}{二\times三\times二\times三\times四\times五甲^{六}} + \cdots$$

$$+ \frac{天^{六}}{二\times三\times四\times五甲^{四}} - \frac{天^{八}}{二\times三\times二\times三\times四\times五甲^{六}} + \cdots$$

$$- \frac{天^{八}}{二\times三\times四\times五\times六\times七甲^{六}} + \cdots$$

⋮

此爲第一次乘式通分併之得式如下

$$地^{二} = 天^{二} - \frac{天^{四}}{一\times三甲^{二}} + \frac{三二天^{六}}{一\times二\times三\times四\times五甲^{四}} - \frac{九六天^{八}}{一\times二\times三\times四\times五\times六\times七甲^{六}} + \cdots$$

再以原式左右各乘之左邊得地右右邊所得列如下

[illegible]

此爲第二次乘式通分併之得下式并左列之

[illegible]

再以原式左右各乘之左邊得地右右邊列如左方式

[illegible]

此爲第三次所乘式併之仍偕左列之

[illegible]

再以原式左右各乘之左邊得地右右邊列如下

[illegible]

併而偕左列之得左式

地五 一二 天六 丅 二五 〤天 三〣七 一丄 |||

此爲第四次乘得後之併式再以原式左右各乘之

地六 ── 天六 丅||||

此爲第五次乘得式再以原式左右乘之

地七 ── 天七 丅|||

此爲第六次乘得式

乃置第二次乘得式以[illegible]乘之得式如下

[illegible]

右邊第二級母子皆以[illegible]通之第三級母子皆以[illegible]通之得下式

[illegible]

以消原式得(二)式

[illegible]

乃置第四次乘式以[illegible]乘之得式列如左

$$\frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九地}^{\text{五}}} = \frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九天}^{\text{五}}} \;\text{丅}\; \frac{\text{乂乂乂…甲}^{\text{六}}}{\text{四五天}^{\text{七}}} \;\text{丄}\; \therefore$$

右邊第二級以[illegible]通之得式如下

$$\frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九地}^{\text{五}}} = \frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九天}^{\text{五}}} \;\text{丅}\; \frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{三二五天}^{\text{七}}} \;\text{丄}\; \therefore$$

以消(二)式得(三)式如下

$$\text{地} \;\text{丄}\; \frac{\text{二乂三甲}^{\text{二}}}{\text{地}^{\text{三}}} \;\text{丄}\; \frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九地}^{\text{五}}} = \text{天} \;\text{丅}\; \frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{二二五天}^{\text{七}}} \;\text{丄}\; \therefore$$

乃置第六次乘式以 $\frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{二二五}}$ 乘之得下式

$$\frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{二二五地}^{\text{七}}} = \frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{二二五天}^{\text{七}}} \;\text{丅}\; \therefore$$

以消(三)式得(四)式

$$\text{地} \;\text{丄}\; \frac{\text{二乂三甲}^{\text{二}}}{\text{地}^{\text{三}}} \;\text{丄}\; \frac{\text{二乂三乂四乂五甲}^{\text{四}}}{\text{九地}^{\text{五}}} \;\text{丄}\; \frac{\text{二乂三乂四乂五乂六乂七甲}^{\text{六}}}{\text{二二五地}^{\text{七}}} = \text{天} \;\text{丅}\; \therefore$$

攺四式左邊二級以下母數皆與原式同三級子之係數爲九乃三之平方積也四級子之係數二百二十五卽九乘二十五乃三之平方積乘五之平方積也然則五級必再以七之平方積乘之六級必再以九之平方積乘之其理已顯不必更推卽定正弦求弧背之級數如下

$$天=地+\frac{地^{三}}{二\times三甲^{二}}+\frac{三^{二}地^{五}}{二\times三\times四\times五甲^{四}}+\frac{三^{二}\times五^{二}地^{七}}{二\times三\times四\times五\times六\times七甲^{六}}+\cdots$$

今有眞數求對數（訥白爾對數）之級數問對數求眞數之級數若何

眞數求對數之級數

$$\frac{眞數}{眞數丅一}⊥\frac{二眞數^{二}}{(眞數丅一)^{二}}⊥\frac{三眞數^{三}}{(眞數丅一)^{三}}⊥\cdots$$

命眞數爲天對數爲地列等數爲原式

$$地=\frac{天}{天丅一}⊥\frac{二天^{二}}{(天丅一)^{二}}⊥\frac{三天^{三}}{(天丅一)^{三}}⊥\frac{四天^{四}}{(天丅一)^{四}}⊥\cdots$$

（原式）

攷此級數之各母若無二三等係數則其限（即無窮級之總數）爲天⊥一乃以原式左右各自乘得左式

$$地^{二}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{天^{二}}{(天丅一)^{二}}丄\dfrac{二天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\dfrac{三天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots\\ \qquad\qquad丄\dfrac{二天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\dfrac{四天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\dfrac{三天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots\end{array}\right\}$$

右邊通分併之如下

$$地^{二}=\frac{天^{二}}{(天丅一)^{二}}丄\frac{四天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\frac{十天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots$$

再以原式左右各乘之得下式

$$地^{三}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\dfrac{四天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots\\ \qquad\qquad\dfrac{二天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots\end{array}\right\}$$

右邊併之式如下

$$地^{三}=\frac{天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\frac{六天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots$$

再以原式左右各乘之得如下

$$地^{四}=一-\frac{天^{四}}{(天丅一)^{四}}丄\cdots$$

乃取第一次乘式二約之得下

$$\frac{二}{地^{二}}=一-\frac{二天^{二}}{(天丅一)^{二}}丄\frac{二天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\frac{二四天^{四}}{一一(天丅一)^{四}}丄\cdots$$

與原式通分相并相消欲此去題毋消係各故之相數爲以消并相得下式

$$地丄\frac{二}{地}=二-\frac{天}{天丅一}丄\frac{天^{二}}{(天丅一)^{二}}丄\frac{六天^{三}}{五(天丅一)^{三}}丄\frac{二四天^{四}}{一七(天丅一)^{四}}丄\cdots$$

爲㈡式又取第二次乘六式約之得下式

$$\frac{六}{地^{三}}=一-\frac{六天^{三}}{(天丅一)^{三}}丄\frac{二二天^{四}}{三(天丅一)^{四}}丄\cdots\cdots$$

與㈡式通分相并得如左

地丄$\frac{地^{二}}{二}$丄$\frac{地^{三}}{六}$ 二 $\frac{天}{天丅一}$丄$\frac{天^{二}}{(天丅一)^{二}}$丄$\frac{天^{三}}{(天丅一)^{三}}$丄$\frac{二四天^{四}}{二三(天丅一)^{四}}$丄⋯

爲(三)式〇又取第三次乘式四二約之

$\frac{二四}{地^{四}}$ 二 $\frac{二四天^{四}}{(天丅一)^{四}}$丄⋯

與(三)式相併得式如下

地丄$\frac{二}{地^{二}}$丄$\frac{六}{地^{三}}$丄$\frac{二四}{地^{四}}$ 一 $\frac{天}{天丅一}$丄$\frac{天^{二}}{(天丅一)^{二}}$丄$\frac{天^{三}}{(天丅一)^{三}}$丄$\frac{天^{四}}{(天丅一)^{四}}$丄⋯

爲(四)式　攷(四)式左邊三級之毋數爲二三相乘四級之毋數爲二三四連乘然則五級必爲二三四五連乘六級必爲二三四五六連乘其理已顯無庸再求右邊各毋之係數消盡其總數必與尺等乃左右各加一即得對數求眞數之級數列如左

天一一丄甲丄二地一丄二×三地一丄二×三×四地丄、、、

今有橢圜最卑後實引平圜上借積度求平引之級數問平引求借積度之級數若何

借積度求半引之級數

$$\text{借積}\,\mathrm{T}\,\frac{\text{徑}}{\text{兩差}\ \text{借積}}\,\perp\,\frac{\text{三}\times\text{徑}^{二}}{\text{兩差}\ \text{借積}^{二}}\,\mathrm{T}\cdots$$

命借積度為天半引度為地半徑為徑兩心差為差列等數為原式

$$\text{地}=\text{天}\ \mathrm{T}\ \frac{\text{徑}}{\text{差天}}\ \perp\ \frac{\text{三}\times\text{徑}^{三}}{\text{差天}^{三}}\ \mathrm{T}\cdots$$

（原式）

以原式左右各自乘列式如下

$$\text{地}^{二}=\left\{\begin{array}{l}\text{天}\ \mathrm{T}\ \frac{\text{徑}}{\text{差天}}\ \perp\ \cdots\ \mathrm{T}\cdots \\ \mathrm{T}\ \frac{\text{徑}}{\text{差天}}\ \perp\ \cdots\ \mathrm{T}\cdots \\ \perp\ \cdots\ \mathrm{T}\cdots \\ \mathrm{T}\ \cdots\ \perp\ \cdots\ \mathrm{T}\cdots \\ \perp\ \cdots\ \mathrm{T}\cdots \\ \vdots\end{array}\right.$$

通分併之

$丅\frac{二\times三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{五}}{二差}丅\frac{徑^{六}}{五\cdot三差^{二}}\right)天^{六}丄\cdots\cdots$

爲第一次乘式再以原式

$\left(丅\frac{二\times三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{五}}{二差}丅\frac{徑^{六}}{五\cdot三差^{二}}\right)天^{七}丄\cdots\cdots\right)$

$\left(丄\frac{二\times三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{六}}{二差^{二}}丅\frac{徑^{七}}{五\cdot三差^{三}}\right)天^{七}丅\cdots\cdots\right)$

$\left(丄\frac{二\times三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{六}}{二差^{二}}丅\frac{徑^{七}}{三差^{三}}\right)天^{七}丅\cdots\cdots\right)$

$\left(丅\frac{二\times三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{五}}{差}丅\frac{徑^{六}}{差^{二}}丄\frac{徑^{七}}{差^{三}}\right)天^{七}丅\cdots\cdots\right)$

$\vdots$

通分併之

$丅\frac{三\times四\times五}{一}\left(\frac{徑^{五}}{三差}丅\frac{徑^{六}}{一差^{二}}丄\frac{徑^{七}}{一差^{三}}\right)天^{七}丄\cdots\cdots$

爲第二次乘式以第

得下式

[illegible]

左右各乘之得式如下

[illegible]

得下式

[illegible]

一次乘式乘之如左

⊥ 二乂三/二 (徑二/三差 − 丅 徑四/六差三 − ⊥ 徑五/三差三) 天七 丅、、、、

丅 二乂三/二 (徑四/六差 丅 徑五/五差三 ⊥ 徑六/二差四 丅 徑七/差五) 天七 ⊥、、、

⊥ 二乂三/二 (徑/差 丅 徑四/六差 ⊥ 徑五/差三 丅 徑六/八差四 ⊥ 徑七/差五) 天七 ⊥、、、
、、、、

得之併

⊥ 二乂三/二 (徑二/五差 丅 徑四/二〇差三 ⊥ 徑五/三差三 丅 徑六/二〇差四 ⊥ 徑七/五差五) 天七 丅、、、、

第以式乘次四第為

丅 徑四/二五差四 ⊥ 徑五/二一差五 丅 徑六/七差六 ⊥ 徑七/差七) 天七 ⊥、、、、
、、、、

六第為

$$地^{五} = \begin{cases} 天^{五}\ \text{丅}\left(\frac{徑}{二差}\ \text{丅}\ \frac{徑^{二}}{三差^{二}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{三}}{差^{三}}\right)天^{五} \\ \text{丅}\left(\frac{徑}{二差}\ \text{丅}\ \frac{徑^{二}}{七差^{二}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{三}}{九差^{三}}\ \text{丅}\ \frac{徑^{四}}{差^{四}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{五}}{差^{五}}\right)天^{五} \\ \text{丁} \end{cases}$$

下式

$$地^{五} = 天^{五}\ \text{丅}\left(\frac{徑}{五差}\ \text{丅}\ \frac{徑^{二}}{差^{二}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{三}}{差^{三}}\ \text{丅}\ \frac{徑^{四}}{差^{四}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{五}}{差^{五}}\right)天^{五}$$

一次乘式乘之如下

$$地^{七} = 天^{七}\ \text{丅}\left(\frac{徑}{七差}\ \text{丅}\ \frac{徑^{二}}{差^{二}}\ \text{丄}\ \frac{徑^{三}}{五差^{三}}\right.$$

次乘式

乃置原式以徑差

丅 二×三×四×五徑六/差二天五 丄 二×三×四×五×六×七徑八/差二天七 丅 ⋯⋯

以消原式

丅 二×三×四×五/一 (徑五/差 丄 徑六/差二) 天五 丄 二×三×四×五×六×七/一 (徑七/差 丄 徑八/差二) 天七 丅 ⋯⋯

為甲一式再以徑差

丅 二×三×四×五徑七/差三天五 丄 二×三×四×五×六×七徑九/差三天七 丅 ⋯⋯

以消甲一

丅 二×三×四×五/一 (徑五/差 丄 徑六/差二 丄 徑七/差三) 天五 丄 二×三×四×五×六×七/一 (徑七/差 丄 徑八/差二 丄 徑九/差三) 天七 丅 ⋯⋯

為甲二式再以

丅 二×三×四×五徑八/差四天五 丄 二×三×四×五×六×七徑一〇/差四天七 丅 ⋯⋯

以消甲二

丅 二×三×四×五/一 (徑五/差 丄 徑六/差二 丄 徑七/差三 丄 徑八/差四) 天五 丄 二×三×四×五×六×七/一 (徑七/差 丄 徑八/差二 丄 徑九/差三 丄 徑一〇/差四) 天七 丅 ⋯⋯

為甲三式乃細察之設如

乘之得下式

$$\frac{徑}{差地}=\frac{徑}{差天}-\frac{徑^{二}}{差^{二}天}+\frac{二\times三\,徑^{四}}{差^{二}天^{三}}$$

得式如下

$$地+\frac{徑}{差地}=天-\frac{徑^{二}}{差^{二}天}+\frac{二\times三}{一}\left(\frac{徑^{三}}{差}+\frac{徑^{四}}{差^{二}}\right)天^{三}$$

乘原式得下式

$$\frac{徑^{二}}{差^{二}地}=\frac{徑^{二}}{差^{二}天}-\frac{徑^{三}}{差^{三}天}+\frac{二\times三\,徑^{五}}{差^{三}天^{三}}$$

式得下式

$$地+\frac{徑}{差地}+\frac{徑^{二}}{差^{二}地}=天-\frac{徑^{三}}{差^{三}天}+\frac{二\times三}{一}\left(\frac{徑^{三}}{差}+\frac{徑^{四}}{差^{二}}+\frac{徑^{五}}{差^{三}}\right)天^{三}$$

$\frac{徑^{三}}{差^{三}}$乘原式如下

$$\frac{徑^{三}}{差^{三}地}=\frac{徑^{三}}{差^{三}天}-\frac{徑^{四}}{差^{四}天}+\frac{二\times三\,徑^{六}}{差^{四}天^{三}}$$

式得下式

$$地+\left(\frac{徑}{差}+\frac{徑^{二}}{差^{二}}+\frac{徑^{三}}{差^{三}}\right)地=天-\frac{徑^{四}}{差^{四}天}+\frac{二\times三}{一}\left(\frac{徑^{三}}{差}+\frac{徑^{四}}{差^{二}}+\frac{徑^{五}}{差^{三}}+\frac{徑^{六}}{差^{四}}\right)天^{三}$$

此消至無窮必得左式

⊥ 二乂三/一 (徑三/差 ⊥ 徑四/差二 ⊥ 徑五/差三 ⊥ 徑六/差四 ⊥ 徑七/差五 ⊥ ⋯⋯) 天三

⊥ 二乂三乂四乂五乂六乂七/一 (徑七/差 ⊥ 徑八/差二 ⊥ 徑九/差三 ⊥ 徑一〇/差四 ⊥ 徑一一/差五) 天七 ⊤ ⋯

是謂

乃

甲 ═══ ⊥ ⋯⋯)

乃置第二次乘式以

⊥ 徑八/三差四) 天五 ⊤ 二乂三乂二乂三乂四乂五/一 (徑八/三差二 ⊤ 徑九/六差三 ⊥ 徑一〇/一三差四) 天七 ⊥ ⋯⋯

通分消甲

⊥ ⋯) 天三 ⊤ 二乂三乂四乂五/一 (徑五/差 ⊥ 徑六/差二 ⊤ 徑七/一九差三 ⊥ 徑八/二差四 ⊥ 徑九/差五 ⊥ ⋯⋯) 天五

⊥ 徑一〇/九二差四 ⊥ 徑一一/差五 ⊥ ⋯⋯) 天七 ⊤ ⋯⋯

為乙一式再置第二次乘

⊥ 徑九/二差五) 天六 ⊤ 二乂三乂四乂五乂六/一 (徑九/二差三 ⊤ 徑一〇/六四差四 ⊥ 徑一一/五二差五) 天七 ⊥ ⋯

通分以消乙

天一地∴丄徑四差丄徑三差丄徑二差丄徑差(地丄

天五∴丄徑四差四丄徑三差三丄徑二差二丄徑六差丄徑五差(五乂四乂三乂二丅

甲式

令

徑四差四丄徑三差三丄徑差丄徑差(

徑三差三乘之得式如下

徑三差三丅徑六差六丄天(徑五差五丅徑四差四丄徑差(三乂三 ━ ━ 徑差地三乂

式得下式

徑七差五丄徑六差六丄徑五差五丅徑差(三乂天丄徑差地三乂丅地甲丄地

徑九差三 ━ 丅 ━ 徑八差二 ━ 丄 ━ 徑七差(七乂六乂五乂四乂三乂二丄

式以徑四差四乘之得式如下

徑八差四丅徑差丄天丅徑七差丄徑六差丅徑五差丄徑差四(三乂三 ━ ━ 徑四差四地三乂

一式得左式

[illegible]

爲乙二式再置第二次乘

[illegible]

通分以消乙

[illegible]

爲乙三式○乃細察地係數中之小級即三乘垛之逐層數也詳後垛積表其理已顯不必再求而

[illegible]

令

[illegible]

地丄甲地丅二×三/二(徑三/差丄徑四/四差二)地三———天丄三×二/二(徑五/一○差三丅徑六/一○差四)

丄二×三×四×五×六×七/一(徑七/差丄徑八/二○差二丅徑九/三七差三)

式以乘徑五/一○差三其得式如下

徑五/一○差三——三×二/二(徑五/一○差三丅徑六/三○差四丄徑七/三○差五丅徑八/一○差六)天三丄二×三×二/一(徑八/三○差四)

二式得下式

地丄甲地丅二×三/二(徑三/差丄徑四/四差二丄徑五/差三)地二天丄二×三/二(徑六/差四丅徑七/五差五丄徑八/一差六)

丄二×三×四×五×六×七/一(徑七/差丄徑八/差二丅徑九/七差三丅徑一○/一四六差四)

天五天七之係數因地之小級而變定皆已有四級可懸之各級求小級之理乃定乙式如下

地丄甲地丅二×三/二(徑三/差丄徑四/四差二丄徑五/差三丄徑六/二○差四丄徑七/差五)地三天

丄二×三×四×五×六×七/一(徑七/差丄徑八/二差二)

二×三/二(徑三/差丄徑四/四差二丄徑五/一○差三)

乃置第四次乘式以

[illegible]

通分以消乙

[illegible]

為丙一式○再置第四次

[illegible]

通分以消丙

[illegible]

為丙二式○再置第四次

[illegible]

通分以消丙

[illegible]

為丙三式○細察地係數中之小級乃一个五乘垜十个六乘垜之逐層數也其理已顯不必

[illegible]乘之得式如下

[illegible]

式得下式

[illegible]

乘式以[illegible]乘之得式如下

[illegible]

一式得下式

[illegible]

乘式以[illegible]乘之得式如下

[illegible]

二式得下式

[illegible]

再求而天七之係數因地五之小級而變定者已有四級可憑之以求地七小級之理乃定丙式如左

[illegible] 地五 二天 [illegible] 天七 [illegible]

[illegible] 丙

乃置第六次乘式以

[illegible] 天七 [illegible]

以消丙式

[illegible] 天七 [illegible]

為丁一式 ○ 再置第六次

[illegible] 天七 [illegible]

以消丁一

[illegible] 地七 二天 [illegible] 天七 [illegible]

為丁二式 ○ 再置第六次

[illegible] 天七 [illegible]

[illegible] 丄 [illegible] 丄 [illegible] 丄 [illegible] 丄 三地乙丅地甲丄地

合

[illegible] 丄 [illegible] 丄 [illegible]

[illegible] 乘之得式如下

[illegible]

得下式

天 [illegible] 丅地丙丄地乙丅地甲丄地

乘式以 [illegible] 乘之得式如下

[illegible]

得下式

[illegible] 丅地丙丄三地乙丅地甲丄地

乘式以 [illegible] 乘之得式如下

[illegible]

以消丁二

丄 徑九/六二〇差三)地七 〓 天丄 (二X三X四X五X六X七)/一 (徑一〇/五四四〇差四 丄⋯)天七 丅⋯⋯

爲丁三式細察地七係數中之小級乃一个七乘垛五十六个八乘垛

丄 徑九/八二〇差三 丄 徑一〇/五四四〇差四 丄 徑一一/二四九七〇差五 丄⋯)地七 〓 天丄戊七 丅⋯

合觀甲乙丙丁諸小級乃蟬聯垛積也其理已

丅 徑/差 丄 徑四/差 丄 徑九/二差三 丄 徑六/差四 丄⋯) 二X三/丄地三

丄 徑八/四差 丄 徑九/二差 丄 徑一二/五四四〇差四 丄⋯) (二X三X四X五X六X七)/丄地七 丄⋯⋯

式得下式

地丄甲地丅乙地三丄丙地五丅二乂……（徑七差丄徑八六四差二

二百八十个九乘垛之逐層數也其理已顯不必再求乃定丁式如下

地丄甲地丅乙地三丄丙地五丅二乂……（徑六差丄徑八六四差二

顯不必更推卽定平引求借積度之級數如下

天＝地丄（徑差丄徑二差二丄徑三差丄徑四差四丄……）地

丄（徑五差丄徑六一六差七丄徑七九一差三丄徑八三三六差四丄……）二乂……地五丅（徑七差一

垛附

垛乘一	垛乘二	垛乘三	垛乘四	垛乘五
一	一	一	一	一
二	三	四	五	六
三	六	一〇	一五	二一
四	一〇	二〇	三五	五六
五	一五	三五	七〇	一二六
六	二一	五六	一二六	二五二
七	二八	八四	二一〇	四六二
八	三六	一二〇	三三〇	七九二
九	四五	一六五	四九五	一二八七
一〇	五五	二二〇	七一五	二〇〇二
一一	六六	二八六	一〇〇一	三〇〇三
一二	七八	三六四	一三六五	三三六八
一三	九一	四五五	一八二〇	四一八八
一四	一〇五	五六〇	二三八〇	六五六八
一五	一二〇	六八〇	三〇六〇	九六二八
一六	一三六	八一六	三八七六	一三五〇四
一七	一五三	九六九	四八四五	一八三四九
一八	一七一	一一四〇	五九八五	二四三三四
一九	一九〇	一二三〇	七二一五	三一五四九
二〇	二一〇	一四四〇	八六五五	四〇二〇四

積表

六乘垛	七乘垛	八乘垛	九乘垛
一	一	一	一
七	八	九	一〇
二八	三六	四五	五五
八四	一二〇	一六五	二二〇
二一〇	三三〇	四九五	七一五
四六二	七九二	一二八七	二〇〇二
九二四	一七一六	三〇〇三	五〇〇五
一七一六	三四三二	六四三五	一一四四〇
三〇〇三	六四三五	一二八七〇	二四三一〇
五〇〇五	一一四四〇	二四三一〇	四八六二〇
八〇〇八	一九四四八	四三七五八	九二三七八
一一三七六	三〇八二四	七四五八二	一六六九六〇
一五五六四	四六三八八	一二〇九七〇	二八七九三〇
二二一三二	六八五二〇	一八九四九〇	四七七四二〇
三一七六〇	一〇〇二八〇	二八九七七〇	七六七一九〇
四五二六四	一四五五四四	四三五三一四	一二〇一五〇四
六三六一三	二〇九一五七	六四四四七一	一八四六九七五
八七九四七	二九七一〇四	九四一五七五	二七八八五五〇
一一九四九六	四一六六〇〇	一三五七一七五	四一四五七二五
一五九七〇〇	五七六三〇〇	一九三四五七五	六〇八〇三〇〇

一
四
一〇
二〇
三五
五六
八四
一二〇
一六五
二二〇

右三乘垜即地之小級也

六乘垜十倍	五乘垜
	一
一〇	六
七〇	二一
二八〇	五六
八四〇	一二六
二〇一〇	二五二
四六二〇	四六二
九二四〇	七九二
一七一六〇	一二八七
三〇〇三〇	二〇〇二

併之得

一
一六
九一
三三六
九六六
二二六二
五〇八二
一〇〇三二
一八三四七
三二〇三二

右五乘垜頂格六乘垜十倍之低一格並列併之即地之小級也

七乘垜	八乘垜五十六乘	九乘垜二百八十乘
一		
八	五六	
三六	五○四	二八○
一二○	二五二○	二八○○
三三○	九二四○	一五四○○
七九二	二七七二○	六一六○○
一七一六	七二○七二	二○○二○○
三四三二	一六八一六八	五六○五六○
六四三五	三六○三六○	一四○一四○○
一一四四○	七二○七二○	三二○三二○○

併之得

一
六四
八二○
五四四○
二四九七○
九○一一二
二七三九八八
七三二一六○
一七六八一九五
三九三五三六○

右七乘垜頂格八乘垜五十六乘之低一格九乘垜二百八十乘之再低一格並列併之即地之小級也

垜積全表載垜積比類茲僅列一至九乘垜以釋細草也

附蟬聯垛積表

甲	乙	丙	丁	戊
一	一	一	一	一
一	四	一六	六四	二五六
一	九 一	八一 一〇	七二九 九一	六五六一 八二〇
一	一六 四	二五六 八〇	四〇九六 一三四四	六五五三六 二一七六〇
一	二五 九 一	六二五 三〇六 三五	一五六二五 八三七九 九六六	三九〇六二五 二一六〇三六 二四九七〇
一	三六 一六 四	一二九六 八三二 二二四	四六六五六 三四〇四八 九四〇八	一六七九六一六 一二九一二六四 三六〇四四八

法列諸一為甲行次列諸平方數為乙一行降一格復列

之爲乙二行如此遞降二格列之爲三四五六諸行次以乙一行諸層各自乘爲丙一行各再乘爲丁一行各三乘爲戊一行己行以下仿此次以乙之一二行各層併之以二行各層乘之爲丙二行以丙之一二行併之以乙之二行乘之爲丁二行以丁之一二行併之以乙之二行乘之爲戊二行己行以下仿此次併乙之一二三行以乙三行乘之爲丙三行併丙之一二三行以乙三行乘之爲丁三行戊行以下仿此四行以下皆如此法甲行即地之小級乙之各行併之即地[三]之小級丙之各行併之即地[五]之小級餘可類推

無錫徐建寅校

天算或問卷一

則古昔齋算學十三

海甯李善蘭學

善蘭自束髮學算三十後所造漸深友人及門弟子時有問難必詳細答之擇其理之尤精者錄存于卷

或問曰李敬齋得洞淵九容之術而算學益進敢問何者爲九容

答曰卽測圓海鏡二卷中句上容圓股上容圓弦上容圓句股上容圓句外容圓股外容圓弦外容圓句外容半圓股外容半圓九題是也句股容圓係古法非洞淵所創故不在內

又問曰此九題李氏不用天元推演其各法之理可得聞與

答曰句股容圓及九題皆以句股相乘倍之爲實而法則各異要皆以容圓之大句股爲主大句股以三事和爲法得圓徑句上容圓之句股其三事和卽大句股之股弦和故卽以股弦和爲法股上容圓之句股其三事和卽大句股之句弦和故卽以句弦和爲法此卽連比例中率自乘末率除之得首率之理也推之九題莫不皆然

或問曰秦氏大衍術亦有立天元一而其法與李氏朱氏迥異何也

答曰法雖異理實同也但李朱二家所立天元爲未知數秦氏所立天元爲已知數則不同耳試以二元式演之即曉然矣

假如有衍奇三定母||||欲求衍奇若干倍定母去之餘一立天元一爲衍奇以三消之得卌|爲天元式立地元一爲定母以四消之得卌|爲地元式二式相消則得十十||爲二元式倍之得卄卄||以消天元式得十|||卄便知衍奇三倍去二定母當餘一也

或問曰先生言古人句股求弦圖割截移補殊不簡捷願聞簡捷之法

答曰以弦爲底作一中垂綫分爲大小二句股形皆與原句股形同式其大形以股爲弦小形以句爲弦故大形與股方比小形與句方比皆若原形與弦方比合大小二形卽原形故合句股二方卽弦方也

或問曰算書言句股恒用句三股四或句八股十五之率取其句股弦皆無奇零便于入算也不識無奇零之句股可任意造否

答曰造之甚易任取二數或俱偶或俱奇二數有等者大數爲股小數爲句弦較二數無等者大數自乘爲句弦和小數自乘爲句弦較各依本法求得句股弦三事必無奇

零也有等謂小能度大

或問曰汪孝嬰兩積相等兩句弦和相等求兩句股法矜爲創獲力抵梅丁二君之非其法果神妙乎

答曰孝嬰作此法時歲在戊午尚未見天元術辛酉至揚州始見秦李二家書此由苦思而得故自誇神妙若以天元推之所得式本可開二次卽得二句不足異也天元所得開方式可開二次三次四五次以至恒河沙數次者甚多誇爲神妙將不勝其誇矣

以天元推之如左

草曰立天元一爲句倍之以減句弦和得和卌元爲句弦

較以句弦和乘之得和二元二和為股冪寄左倍積以天元除之得積○太為股自之得冪積二○太為同數與左相消得冪積二○和二二和開立方二一次得二一句
又問曰以天元馭此題誠不足異矣不識此題諸線可得整數者有若干形求之有法否
答曰其形多至恒沙數求之亦有法其法任取一平方積四倍之為句弦較于平方內任減一小平方本平方偶者所減亦偶奇者亦奇半其減餘于上又以二方邊較乘本方邊以加上以小方邊除之為第二率倍本方邊為第一率一二率相乘得中率二率自乘得末率并中末率以加

所設句弦較即句弦和末率即餘一句弦較或半減餘加邊較乘本邊以小邊除之不受除奇零不盡也則不必除即以爲二率一二率相乘又以小邊乘之得中率二率自乘得末率二方相乘四倍之爲首率并三率爲句弦和首末二率爲二句弦較

任取大方九小方一相減半之得四于上又以邊較二乘大方邊三得六以加上得一〇以小方邊一除之仍得一〇自之得一〇〇爲末率又以乘倍大方邊六得六〇爲中率四倍大方得三六爲一句弦較加中末二率得一九六爲句弦和末率一〇〇爲又一句弦較并

中末率自之得二二五六〇〇以所設句弦較三六乘之又以句弦和一九六乘之得一八〇六三三六〇〇開平方得一三四四〇〇爲倍直積四除之得句股積三三六〇〇以句弦較一〇〇三六減句弦和得倍句九六一六〇以除倍直積得股一四〇八四

又任取大方八一小方四九相減半之得一六于上又以邊較二乘大邊九得一八加上得三四以小邊七除不受除即以爲二率以乘倍大邊又以小邊乘之得四二八四爲中率二率自之得一一五六爲末率大小二方相乘得三九六九四倍之得一五八七六爲首率并

三率得二一三二一六爲句弦和首末二率爲二一句弦較

如法求各事亦無奇零

或問曰平三角三邊求角以夾角之二邊相乘倍之爲一率二冪相加以對角之邊冪減之爲二率半徑爲三率得四率爲本角之餘弦何也

答曰此大小句股比例也以夾角之小邊爲弦正交大邊之中垂線爲句截大邊一分爲股此形與半徑正餘弦所成句股形同式一率乃弦乘倍大邊二率乃股乘倍大邊三率八線弦四率八線股也或以夾角之大邊爲弦正交小邊引長線之垂線爲句小邊加引長線爲股則一率乃

弦乘倍小邊二率乃股乘倍小邊三率八線弦四率八線股也

如甲乙丙三角己知三邊求甲角作丙子線正交甲乙邊成甲丙子句股形甲丙爲弦甲子爲股甲丙乘甲乙乃弦帶大邊母也倍之是帶倍大邊爲母也乙丙冪內有乙子子丙二冪甲丙冪內有甲子子丙二冪甲乙冪內有甲子子乙二冪又有兩个甲子子乙相乘方甲乙甲丙二冪內減去乙丙冪乃減去乙子子丙二冪也所餘乃二甲子冪二甲子子乙相乘方也乃股帶倍大邊母也弦與股

所帶母同故其比例不變仍若半徑與甲角正弦也若作乙丑線成甲丑乙句股形用甲乙弦甲丑股則所帶母爲倍小邊乙丙冪內爲乙丑丑丙二冪甲乙冪內爲一乙丑冪一丑丙冪一甲丙冪二丑丙丙甲相乘矩長方爲矩甲乙甲丙二冪內減去乙丙冪卽減去乙丑丑丙二冪所餘爲二甲丙冪二甲丙丙丑矩卽丑甲股帶倍甲丙母也甲乙甲丙相乘倍之卽甲乙弦帶甲丙母也比例亦同

或問曰平三角求積以三邊半和與各邊相減得三較三較連乘以乘半和開平方得積何也

答曰三角容圜自圜心作三邊之垂線截三邊爲六分夾角二分兩兩相等即三較也三邊半和爲一率任取一較爲二率餘二較相乘爲三率則垂線冪爲四率又垂線乘半和即三角積二三率相乘乃半和乘垂線冪也以一率除之得垂線冪今不除更乘之是半和冪乘垂線冪即半和垂線相乘積自乘亦即三角積自乘也故開平方得三角積

又問曰四率之理則既聞命矣敢問此四率何以知其相當也

答曰任取二較必同在一邊以此邊爲底餘二邊爲腰作

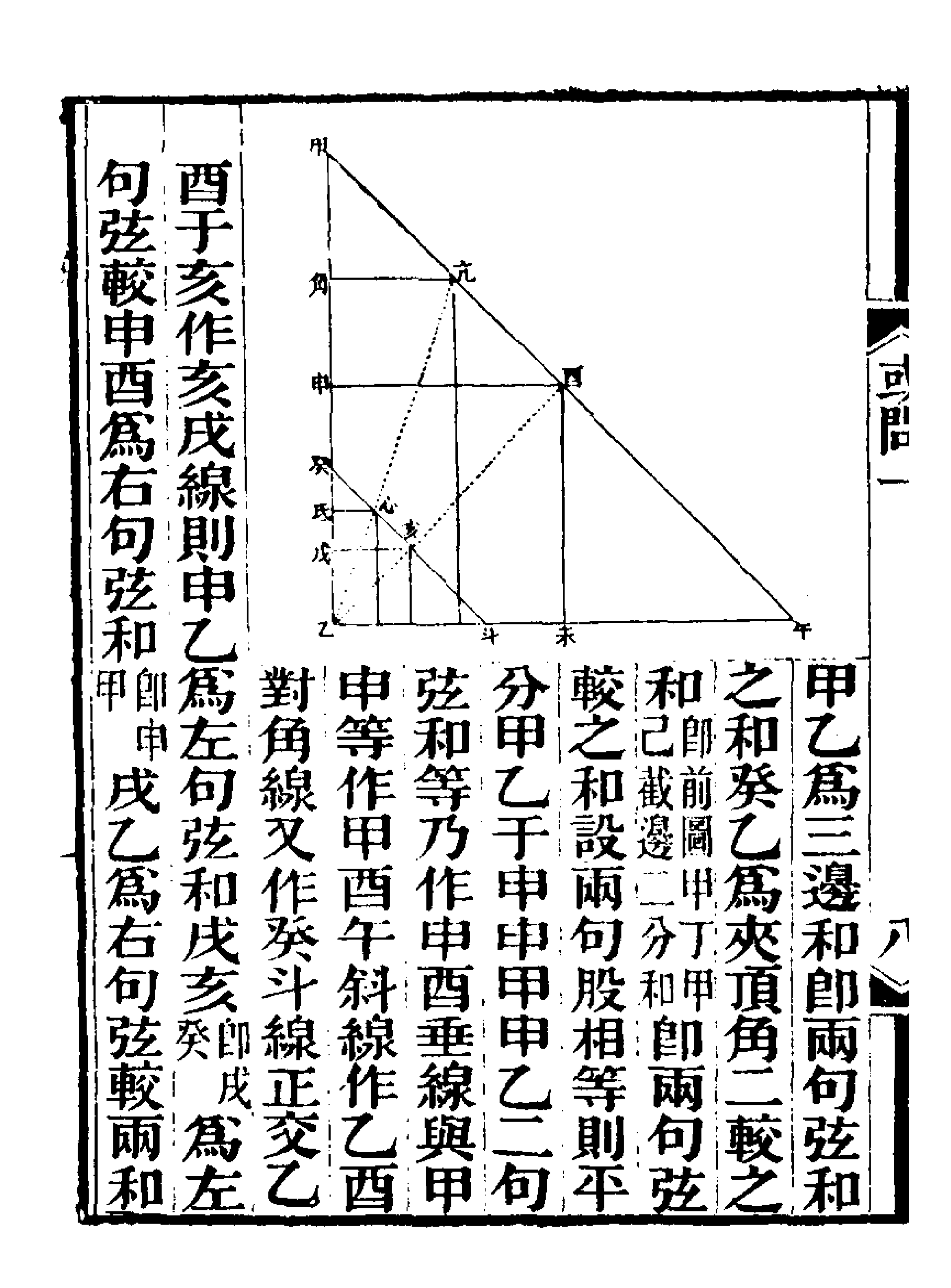
一中垂線分三角形爲二句股形中垂線卽股也兩句弦和比若底內二較比故兩較相乘積與兩句弦和相乘積比若垂線冪與股冪比兩句弦和相乘是句弦和帶餘一句弦和爲母也股冪爲句弦較句弦和相乘積是句弦較帶句弦和爲母也半和爲兩句弦和和之半餘一較爲兩句弦較和之半是半和與餘一較比必若兩句弦和相乘積與股冪比故亦若底內兩較相乘積與垂線冪比也

又問曰句弦和所帶之母餘一句弦和也句弦較所帶之母本句弦和也母旣不同何以比例合也又兩句弦和何以與底內二較同比例也

答曰所指比例非本句弦和與本句弦較相爲比乃本句弦和與餘一句弦較相爲比股爲二形所公共故餘一句弦較與餘一句弦和相乘亦得股冪是二帶毋仍同也設三角底邊不變二腰之和亦不變任變其形作中垂分爲二句股則此句弦和與彼句弦較或彼句弦和與此句弦較比例亦不變恒若半和與餘一較（非底內二較也）之比也兩句弦和與底內二較同比例者此更易明但于所容圜心作二線至底與二腰平行成小三角形與本形同式且亦分二小句股形以垂線爲股又自圜心作底之平行線至二腰成二四等邊形二小句股形之二弦各爲其邊則

底內二二較與兩个小句弦和等故與兩大句弦和同比例也

甲乙丙三角形心爲所容平圓之心心丁心戊心己爲三邊之垂線俱相等甲丁甲己乙丁乙戊丙戊丙己俱兩兩相等卽兩兩各等于三較心子與甲丙平行心丑與甲乙平行心寅心卯與乙丙平行心丑子與甲乙丙同式心戊子與心己寅同式亦同積心戊丑與心丁卯同式亦同積故心丙心乙俱爲四等邊形此解兩句弦和與底內二二較同比例



甲乙爲三邊和即兩句弦和之和癸乙爲夾頂角二較之和即前圖甲丁甲己截邊二分和即兩句弦較之和設兩句股相等則平分甲乙于申申甲甲乙二句弦和等乃作申酉垂線與甲申等作甲酉午斜線作乙酉對角線又作癸斗線正交乙酉于亥作亥戌線則申乙爲左句弦和戌亥即戌癸爲左句弦較申酉爲右句弦和即申甲戌乙爲右句弦較兩和

兩較俱相等即定爲比例率設兩句股不等左句弦和爲角乙右句弦和爲角亢（即角甲）乃作亢乙對角線交癸斗于心作心氐線（即氐癸）爲左句弦較氐乙爲右句弦較左和角乙與右較氐乙比右和角亢與左較心氐比俱若申乙與戌亥比兩和兩較雖千變比例不變也（此解兩句弦和較之比例）

或問曰泰西顔家樂測北極出地簡法先于其處測一恒星自出地平至正午所歷之時及其高度以時變赤道度以其大矢爲一率正矢爲二率高度正弦爲三率得四率爲正弦查表得度內減去星距天頂度餘與九十度相加

折半轉減九十度得北極出地度戴赤水遺珍疇人傳亦采之然攷之不甚合如北極出地三十度星之高度七十六度則求得之弧必爲十六度求得之弧乃星入地最深度與高度相加折半爲星距極度減星距天頂十四度得二度與九十度相加折半得四十六度轉減九十度得四十四度較三十度多十四度敢問其法果不密乎抑別有故乎

答曰此法必北極出地不滿四十五度星過正午在天頂南又必爲赤道北之星則合不如是則不合今所取星其正午點在天頂北故不合也今爲改其法曰星在赤道北則大矢爲一率正矢爲二率高度正弦爲三率求得四率

爲星入地最深度正弦查表得度視星之正午在天頂北則與高度相減折半爲北極出地度在天頂南則與高度相加以減一百八十度餘折半爲北極出地度星在赤道南則正矢爲一率大矢爲二率高度正弦爲三率得四率爲深度正弦查表得度攷星之最深點在地底點北則以加高度以減一百八十度折半在地底點南則與高度相減折半俱得北極出地度如此則任測一星俱可推矣

或問曰赤水遺珍弧三角三邊求角法以三弧之和折半爲半總與角旁兩弧相較得二較弧乃以角旁小弧正弦爲一率小弧之較弧正弦爲二率大弧之較弧正弦爲三

率得四率為初數又以角旁大弧正弦為一率初數為二率半徑為三率得四率為末數以半徑乘末數開平方得半角正弦圖解不甚明晰顧更詳言之

答曰此以天元推之理自明識別得角旁兩弧之正弦各為半徑其距等圈內二半角正弦相乘積與二較弧正弦相乘積等立天元一為半角正弦以角旁大弧正弦乘之半徑除之不除寄為母得○太（大弧正弦）為大距等圈內半角正弦（內帶半徑為母）又以角旁小弧正弦乘天元半徑除之不除寄為母得○太（小弧正弦）為小距等圈內半角正弦（內帶半徑為母）二正弦相乘得○○元（小弧正弦 大弧正弦）為相乘積（內帶半徑冪為母○寄左）乃以二較弧正

弦相乘又半徑冪通之得小較正弦大較正弦半徑冪爲同數與左相消得小較正弦大較正弦半徑冪

○小弧正弦大弧正弦實與隅俱以小弧正弦大弧正弦約之得小弧正弦大弧正弦小較正弦大較正弦半徑冪○卜開平方

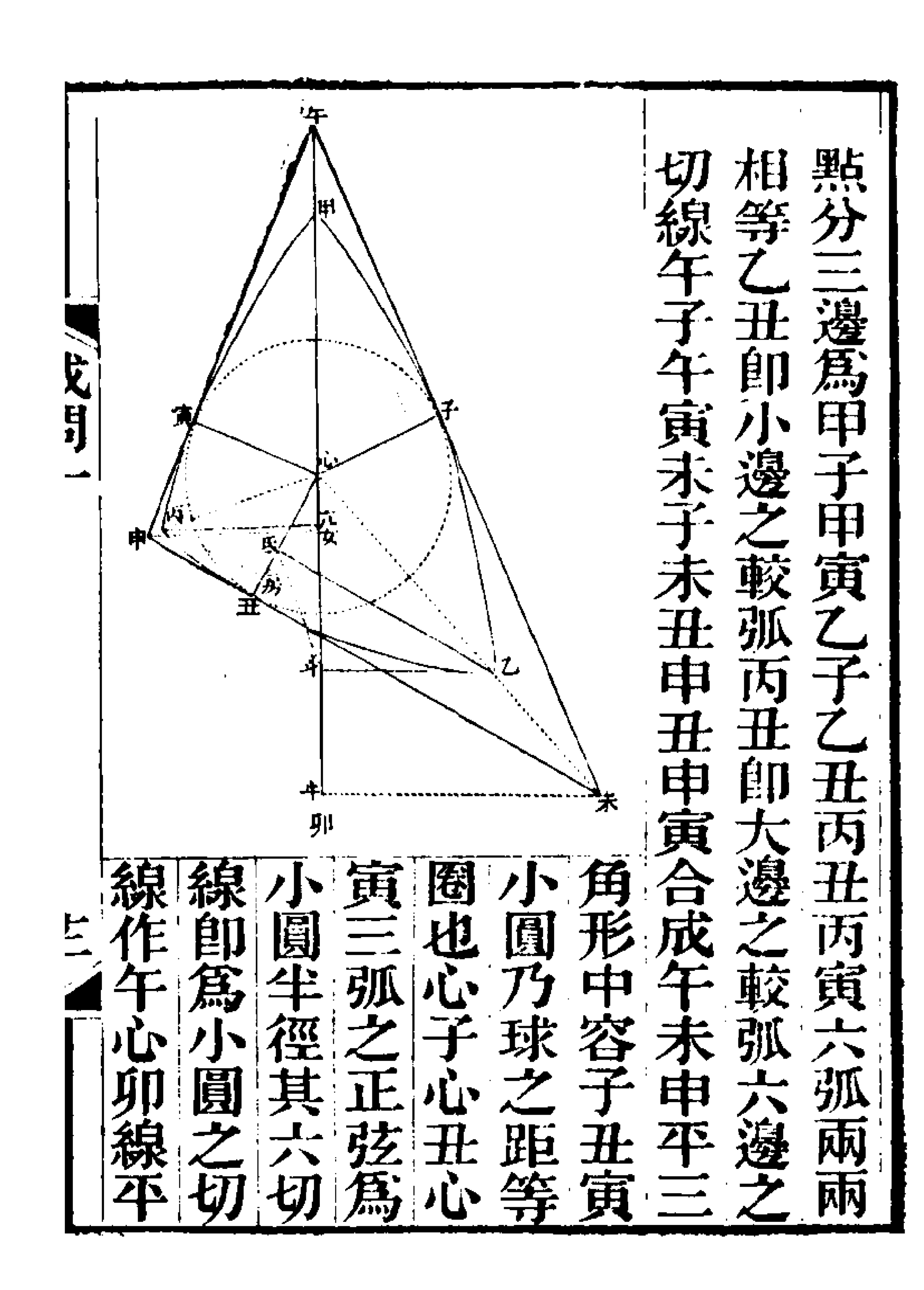
得半角正弦實之上爲分母下爲分子乃大較正弦與小較正弦相乘又以半徑冪乘之而以大小弧正弦相乘積除之也若分言之大小二較正弦相乘以小弧正弦除之以半徑乘之又以大弧正弦除之又以半徑乘之乃開平方則即西人之法也

又問曰兩距等半角正弦相乘之積何以知其與兩較弧

正弦相乘積等也

答曰自三角心作三弧正交三邊分三邊爲六弧對邊二分即二較弧也以三角心爲球頂點則六弧之切線合成一平三角形容一距等圈距等圈之半徑即所作三弧之正弦六弧之切線亦即距等圈之切線則角旁兩弧正弦及兩距等正弦成二同式三角形其面與六弧切線所成之面平行其邊交互成四率比例兩距等正弦相乘即一四率相乘兩較弧正弦相乘即二三率相乘故二積等也

甲乙丙弧三角形（頂點之上視之其形如此）求甲角自三角心作心子心丑心寅三弧（從頂視之凡過頂之弧皆成直線）正交三邊以三交



點分三邊爲甲子甲寅乙子乙丑丙丑丙寅六弧兩兩相等乙丑卽小邊之較弧丙丑卽大邊之較弧六邊之切線午子午寅未子未丑申丑申寅合成午未申平三角形中容子丑寅小圓乃球之距等圈也心子心丑心寅三弧之正弦爲小圓半徑其六切線卽爲小圓之切線作午心卯線平

分乙甲丙弧角亦平分未午申平角乃作乙斗丙亢二線卽兩距等半角正弦作乙氐丙房二線卽二較弧正弦作斗氐房亢二聯線成乙斗氐丙房亢二三角形必同式蓋心乙斗與心丙房二句股形同式乙心斗角爲心午子心未子二角之和等于心申丑之餘角蓋午未申三全角合之得半周三半角必得一象限也而丙心房卽心申丑之餘角與乙心斗角等凡句股形有等角必同式也心乙氐心丙亢二句股形亦同式乙心斗丙心房二角內各加一丑心斗角爲二形之等角乙斗氐形以乙氐乙斗二大股爲二邊丙房亢形以丙亢丙房二小股爲二邊氐乙斗亢丙房二角又等故二形必同式故乙氐丙房相乘與乙斗丙亢相乘等積也　平三角未午與申

一女相乘未丑與申丑相乘亦等積

或問曰平三角以中垂線乘半底得面積不知弧三角之面積亦可求否

答曰可其法置半球自頂點均分爲三百六十大分每大分又均分爲六十中分每中分又均分爲六十小分有弧三角欲求其面積者以三角之度相并減去一百八十度餘幾度幾分幾秒即知其面積與幾大分幾中分幾小分等此法歸安嚴君立峰所造攷之密合可信也

又問曰攷之之法若何

答曰球容四面六面八面十二面二十面諸體體之邊皆

通弦也依通弦之弧背分球面爲各分其面積必皆等則攻之易矣依四面體分之爲三角形四其面積等于一百八十大分其三角皆一百二十度相并得三百六十度減去一百八十度恰餘一百八十度也依六面體分之爲四角形六每形對角分之爲三角形十二其面積等于六十大分其二角皆六十度一角一百二十度相并得二百四十度減去一百八十度恰餘六十度也依八面體分之爲三角形八其面積等于九十大分其三角皆九十度相并得二百七十度減去一百八十度恰餘九十度也依十二面體分之爲五角形十二每形由中心作五對角弧作五

垂弧分之爲三角形一百二十其面積等于六大分其一角九十度一角六十度一角三十六度相并得一百八十六度減去一百八十度恰餘六度也依二十面體分之爲三角形二十其面積等于三十六大分其三角皆七十二度相并得二百十六度減去一百八十度恰餘三十六度也累攷皆密合知其法非臆造也

或問曰弧三角兩弧夾一角求餘二角用切線分外角法以兩弧半和之餘弦爲一率半較之餘弦爲二率半外角正切爲三率得四率爲餘角半和之正切又以兩弧半和之正弦爲一率半較之正弦爲二率半外角正切爲三率

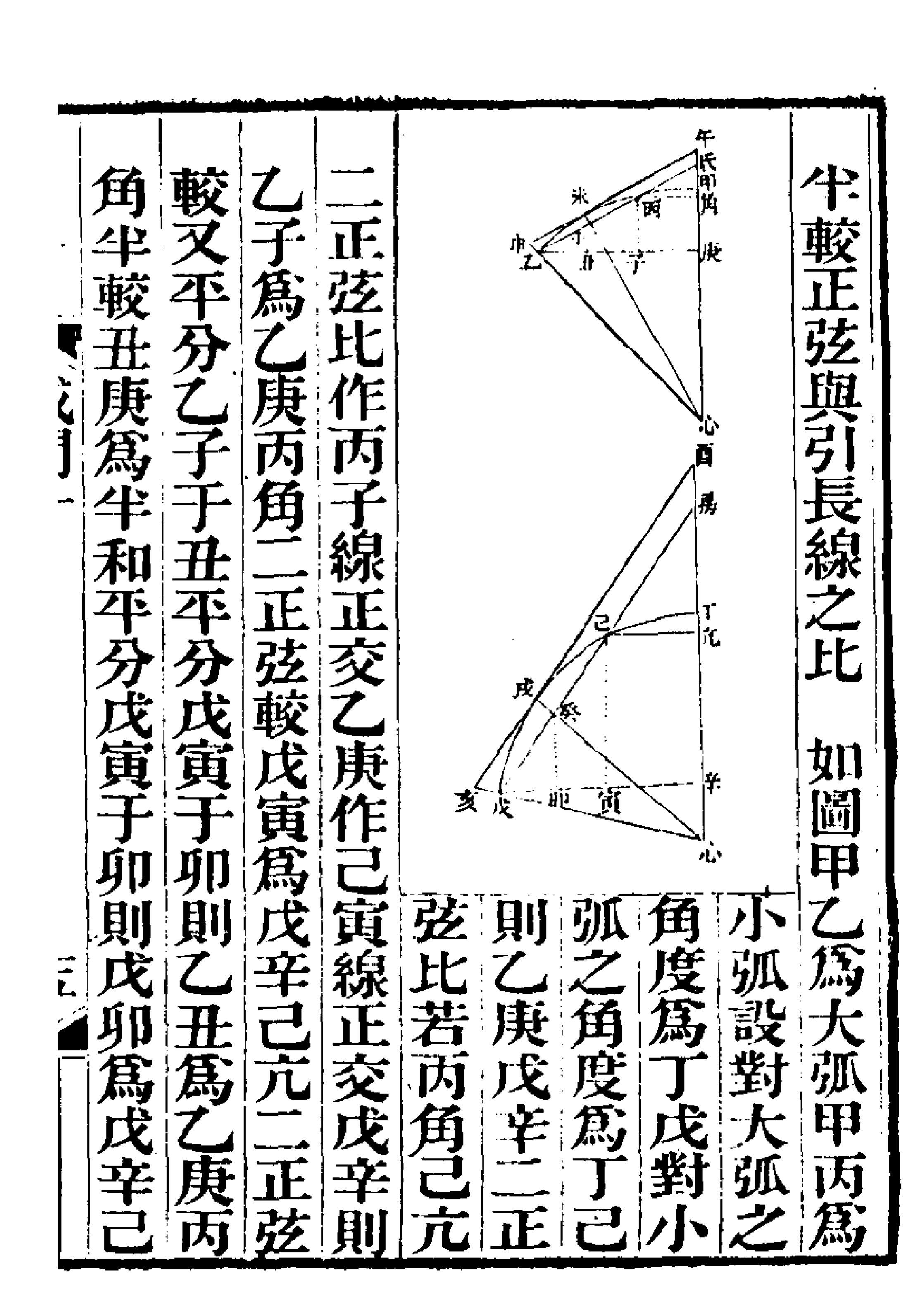
得四率爲餘角半較之正切前人未有圖解願詳其理

答曰此當列款明之

一凡弧三角若一角不變餘二角漸變其和恒等則其較角愈小夾定角之二邊和亦愈小二角相等無較角夾角之二邊和爲最小　如圖甲乙丙甲丁戊二弧三角形同用一甲角卽定角乙丙二角和丁戊二角和相等丁戊之較角大乙丙之較角小則甲丙甲乙二邊和必小于甲丁甲戊二邊和理易明

二凡相對二弧二角其半較半和二正切同比例皆若

半較正弦與引長線之比　如圖甲乙為大弧甲丙為小弧設對大弧之角度為丁戊對小弧之角度為丁己則乙庚戊辛二正弦比若丙角己亢



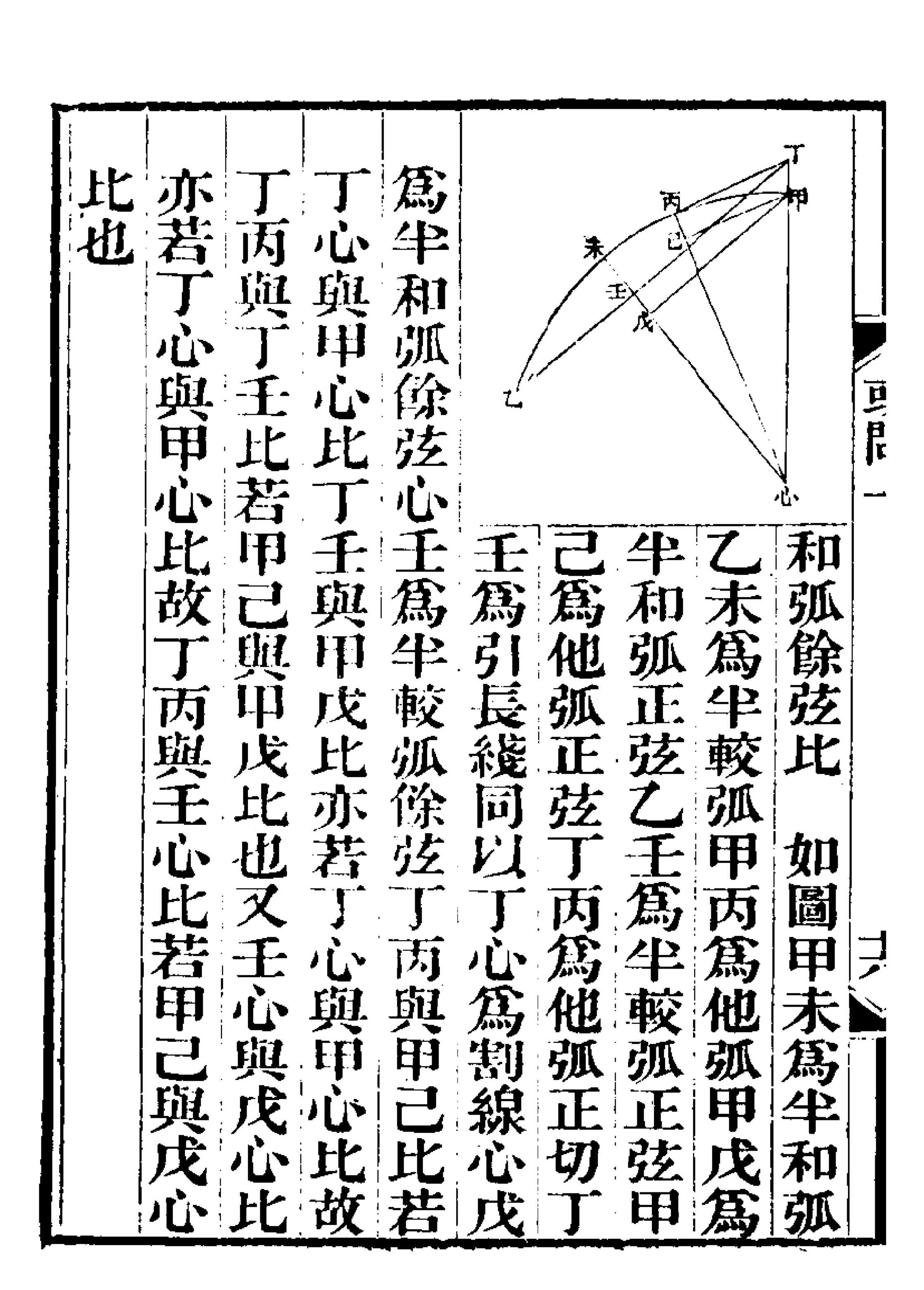
二正弦比作丙子線正交乙庚作己寅線正交戊辛則乙子為乙庚丙角二正弦較戊寅為戊辛己亢二正弦較又平分乙子于丑平分戊寅于卯則乙丑為乙庚丙角半較丑庚為半和平分戊寅于卯則戊卯為戊辛己

亢半較卯辛爲半和故乙丑與丑庚比若戊卯與卯辛比作乙丙線引長之至氐作戊己線引長之至房則乙壬戊癸俱爲半較正弦壬氐癸房俱爲引長線乙丑爲股乙壬爲弦乙庚爲股乙氐爲弦又戊卯爲股戊癸爲弦戊辛爲股戊房爲弦故乙壬與壬氐比若乙丑與丑庚比戊癸與癸房比若戊卯與卯辛比夫戊卯與卯辛比若乙丑與丑庚比故戊癸與癸房比若乙壬與壬氐比未申半較弧正切與未午半和弧正切比若乙壬與壬氐比戊亥半較角正切與戊酉半和角正切比若戊癸與癸房比故申未與未午比若亥戊與戊酉比而亥

戌與戌酉比亦若乙壬與壬氐比也

三凡正弧三角對正角之弧其正切與正弦比若一角正切與又一角餘切比　正弧三角舊法有一角有對正角之弧求餘一角者以弧之餘弦爲一率半徑爲二率角之餘切爲三率得四率爲所求角正切夫餘弦與半徑比若正弦與正切比故弧之正弦正切與一角餘切一角正切同比例也

四凡和弧較弧之引長線二款與他弧共用一割線則他弧正切與此引長線比若他弧正弦與此半和弧正弦比他弧正切與此半較弧餘弦比若他弧正弦與此半

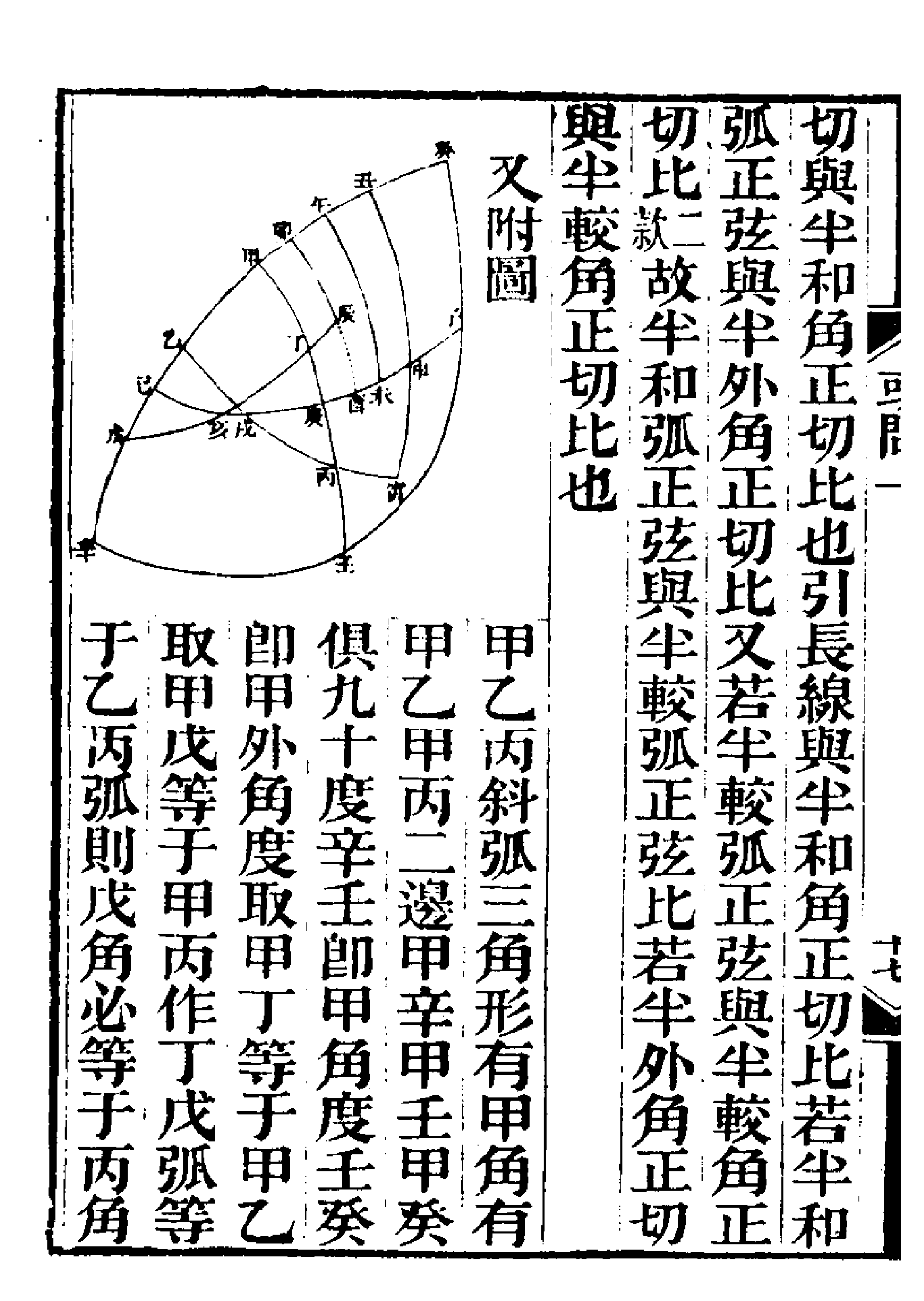


和弧餘弦比　如圖甲未爲半和弧乙未爲半較弧甲丙爲他弧甲戊爲半和弧正弦乙壬爲半較弧正弦甲己爲他弧正弦丁丙爲他弧正切丁壬爲引長綫同以丁心爲割線心戊爲半和弧餘弦心壬爲半較弧餘弦丁丙與甲己比若丁心與甲心比丁壬與甲戊比亦若丁心與甲心比故丁丙與丁壬比若甲己與甲戊比也又壬心與戊心比亦若丁心與甲心比故丁丙與壬心比若甲己與戊心比也

詳觀右四款卽可明此題之理夾角之二邊或相等或不相等若所夾之角不變餘二角之和恒等一款則以二邊相等爲根二邊相等自所夾角作垂弧平分爲相等二正弧三角形則二款之又一角餘切乃此題之分角餘切卽半外角正切也三款之一角正切卽此題半和角正切也四款之他弧乃此題相等二邊之一卽相等二邊之半和也四款之半和弧半較弧則卽不等二邊之半和半較也相等二邊之半和其正弦正切比旣若半外角正切與半和角正切比三款又若不相等二邊之半和弧餘弦與半較弧餘弦比四款故半和弧餘弦與半較弧餘弦比若半外角正

切與半和角正切比也引長線與半和角正切比若半和弧正弦與半外角正切比又若半較弧正弦與半較角正切比二款故半和弧正弦與半較弧正弦比若半外角正切與半較角正切比也

又附圖

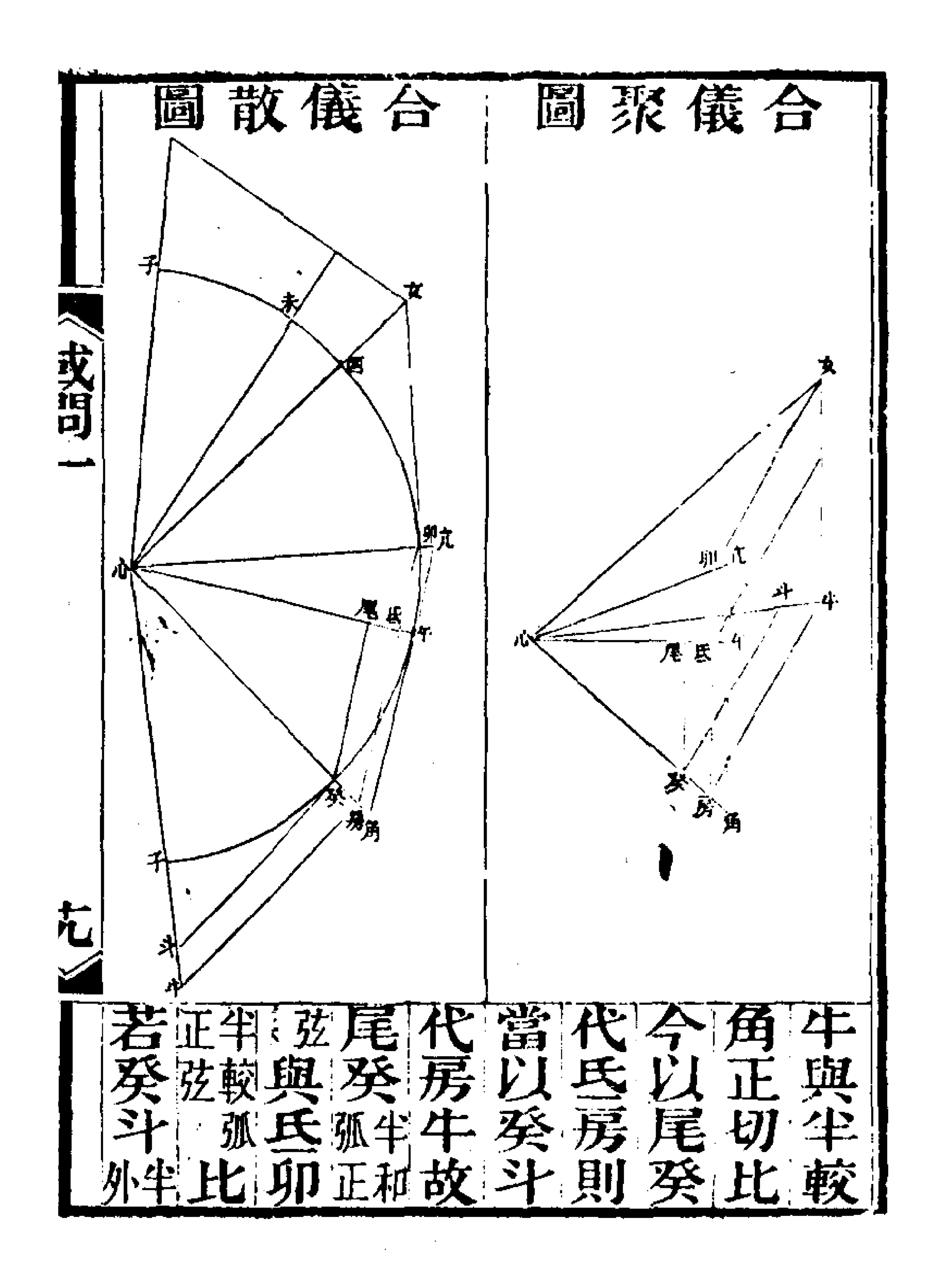


甲乙丙斜弧三角形有甲角有甲乙甲丙二邊甲辛甲壬甲癸俱九十度辛壬卽甲角度壬癸卽甲外角度取甲丁等于甲乙取甲戊等于甲丙作丁戊弧等于乙丙弧則戊角必等于丙角

平分乙戊于己平分丁丙于庚作庚己弧此弧必平分乙丙弧于戊丁戊弧于亥又引長之必平分外角度壬癸于子故子癸爲半外角度乃取己午己未俱九十度作午未弧取戊卯戊辰各九十度作卯辰弧即丙角度取乙丑乙寅各九十度作丑寅弧即乙角度卯辰弧交己庚弧于酉丑寅弧交己庚弧于申辰酉寅申二弧必等何則亥辰酉戊寅申二三角形亥戊二角既等辰寅又俱爲正角亥辰戊寅二弧又等戊辰乙寅俱九十度所去戊亥乙戊二弧既等則餘二弧亦必等矣則辰酉寅申二弧不得不等矣故丑申卯酉俱爲半和角度午丑申未午卯酉未二四角形申酉二角既等丑午未及卯午未又俱爲

三正角丑午卯午二弧又相等故丑申卯酉亦相等也甲己爲半和弧與癸午等甲癸己午俱九十度故己戊己乙俱爲半較弧與午卯午丑等戊卯己午乙丑俱九十度故癸午未子四角形癸午未三角俱正卯午未酉四角形卯午未三角俱正乃作二四角合儀觀之其比例相當之理顯然矣

如圖午角爲半和弧正切午亢爲半較弧正切尾癸爲半和弧正弦尾心爲餘弦氐卯爲半較弧正弦氐心爲餘弦卯女爲半和角正切與房牛等癸斗爲半外角正切尾心半和弧餘弦與氐心半較弧餘弦比若癸斗半外角正切與房牛半和角正切比觀圖自明也準二款氐房與氐卯比若房



牛與半較角正切比今以尾癸代氐房則當以癸斗代房牛故尾癸半和弧正弦與氐卯半較弧正弦比若癸斗半外

角正切與半較角正切比也

或問曰先生嘗言法除實畸零不盡者其數必爲迴環數又言畸零不盡者其數必爲無窮連比例願聞其詳

答曰迴環數者如七除一得畸零數爲一四二八五七一四二八五七一四二八五七如是至無窮必一四二八五七迴環不已也又如十三除一得畸零數爲七六九二三○七六九二三○如是至無窮必七六九二三○迴環不已也凡畸零數莫不如是連比例者如七除十初商一餘三則畸零數必以一爲首率其連比例皆如十與三又如十三除百初商七餘九則畸零數必以七爲首率其連比

例皆如百與九凡畸零數莫不如是

或問曰梅氏方圓冪積末有橢圓體截積一條自註云訂梓書之誤然梅氏法亦未密合橢圜體求截積果無法乎

答曰安在其無法也梅氏特未精思爾試以大矢爲一率大矢加半徑爲二率小圓角爲三率得四率爲小分又以小矢爲一率小矢加半徑爲二率大圓角爲三率得四率爲大分一法半徑乘徑冪大矢冪除之爲一率小矢加半徑爲二率全積爲三率得四率爲大分半徑乘徑冪小矢冪除之爲一率大矢加半徑爲二率全積爲三率得四率爲小分用此二法推之皆密合也

或問曰幾何原本作圜內五邊形法似覺太繁曲不知更有簡法否

答曰亦嘗思得一法先作一切線等于半徑之半即作一割線次以切線端為心切點為界旋規分割線為二分次自圜心作半徑之垂線末自切點作線過割線分點至垂線即五等邊形之一邊也

又問曰願聞其理

答曰凡理分中末線小分半大分和之正方五倍半大分之正方（幾何原本十三卷三題）半徑為大分切線為半大分割線即小分半大分和也以切線減之則餘為小分自圜心至末

所作線之半徑垂線與割線減餘等亦爲小分因割線上兩三角相似皆有兩邊相等也凡理分中末線以圜內六邊形之一邊（即半徑）爲大分則必以十邊形之一邊爲小分（十三卷九題）故垂線爲十邊形之一邊凡圜內五邊形一邊之正方等于六邊形十邊形各一邊之正方和（十三卷十題）今以半徑爲股垂線爲句而末作線爲其弦則必等于五邊形之一邊矣

附圖

切線
割線
半徑
末線

長沙丁取忠校